Devoir libre N°1 (correction)

à rendre le mardi 16/09/2025.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls. On considère le système

$$(S) : \begin{cases} x & \equiv & a & [p] \\ x & \equiv & b & [q] \end{cases}$$

d'inconnue x, où a et b sont des entiers.

1. Premier cas : p et q sont premiers entre eux.

a. Soit $(\widehat{a}, \widetilde{b}) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. D'après le théorème des restes chinois, il existe un unique $\overline{c} \in \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ tel que $f(\overline{c}) = (\widehat{a}, \widetilde{b})$. Par conséquent, $\widehat{a} = \widehat{c}$ et $\widetilde{b} = \widetilde{c}$, donc l'entier c est solution du système (S).

b. Comme p et q sont premiers entre eux, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu+qv = 1$. La solution $c = a+p(b-a)u$ convienne.

c. x est solution si et seulement si $\overline{x} = \overline{c}$, donc l'ensemble des solutions est $\left\{c + kpq,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Deuxième cas : p et q ne sont pas premiers entre eux.

a. Si le système (S) admet une solution, disons x_0, alors comme d divise p et q, d divise $x_0 - a$ et d divise $x_0 - b$, par suite, d divise $b - a$.

b. Supposons d divise $b - a$. Il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b - a = cd$. Considérons un couple de Bezout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ pour (p, q) : $pu + qv = d$. Alors

$$a + cup \equiv a\ [p] \quad \text{et} \quad a + cup \equiv a + cup + cvq \equiv a + cd \equiv a + b - a \equiv b\ [q].$$

L'entier $a + cup$ est donc solution du système (S). Le système (S) devient alors équivalent à

$$\begin{cases} x & \equiv a + cup\ [p] \\ x & \equiv a + cup\ [q] \end{cases} \quad (\star).$$

Donc $(\star) \iff x - (a + cup)$ est multiple de p et q $\iff$ m divise $x - (a + cup)$. D'où l'ensemble des solutions est $\left\{a + cup + km,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Calcul le PGCD de deux entiers a et b.

```
def gcd(a,b):
    while b!=0:
        a,b=b,a%b
    return abs(a)   Le PGCD doit etre positif
```

4. a. On a $a = bq + r$ et $bu + rv = b \wedge r$ donc $av + b(u - qv) = av + bu - bqv = bu + (a - bq)v = bu + rv = b \wedge r$. D'après l'algorithme d'Euclide, $a \wedge b = b \wedge r$. Ainsi, $av + b(u - qv) = a \wedge b$. Par suite, $(v, u - qv)$ est un couple de coefficients de Bézout de a et b.

b. Calcul le couple (u, v) de coefficients de Bézout de a et b.

```
def Bezout(a,b):
    while b==0:
        return (1, 0)
    else:
        (u, v) = Bezout(b, a%b)
        return (v, u - (a//b)*v)
```

5. Calcul une solution du système (S).

```
def sol_syscongru(a, b, p, q):
    d = gcd(p, q)
    c = (b - a) / d
    u = bezout(p, q)[0]
    if d != 1:
        if (b - a) % d ==0:
            return a + c*u*p
        else:
            print 'Pas de solution'
    else:
        return a + p*(b - a)*u
```

La réponse des questions 3, 4.*b et* 5 *à envoyer dans un* fichier.py *sur e-mail :* binyzemohamed@gmail.com