Devoir libre N°1

à rendre le mardi 16/09/2025.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls. On considère le système

$$(S): \begin{cases} x & \equiv & a & [p] \\ x & \equiv & b & [q] \end{cases}$$

d'inconnue x, où a et b sont des entiers.

1. Premier cas : p et q sont premiers entre eux.

a. Montrer que le système admet au moins une solution c dans $\mathbb{Z}$.

b. Déterminer une solution particulière c du système et en déduire l'ensemble des solutions.

2. Deuxième cas : p et q ne sont pas premiers entre eux.

Soit $d = p \wedge q$ et $m = p \vee q$.

a. Montrer que, si le système (S) admet une solution, alors d divise $b - a$.

b. Réciproquement, supposons d divise $b - a$. Montrer que le système (S) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.

3. Écrire une fonction `gcd(a, b)` en language Python qui renvoie le pgcd des entiers naturels a et b.

4. **a.** Montrer que si q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b et si (u, v) est un couple de coefficients de Bézout de b et r, alors $(v, u - qv)$ est un couple de coefficients de Bézout de a et b.

b. Écrire alors une fonction `Bezout(a, b)` en language Python qui renvoie le couple (u, v) de coefficients de Bézout de a et b.

5. Écrire une fonction `SolSys(a, b, p, q)` en language Python qui renvoie une solution du système (S) dans le cas où p et q sont premiers ou pas.

La réponse des questions 3, 4.*b et* 5 *à envoyer dans un* fichier.py *sur e-mail :* binyzemohamed@gmail.com