Devoir libre N°2

à rendre le samedi 11/10/2025.

Partie I : Étude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme notée $\|.\|_\infty$ telle que pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|$.

1. Montrer que : $\forall\,(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$, $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

2. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. On pose $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $N(X) \leq \left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} N(E_{i,j})\right)\|X\|_\infty$.

b. **i.** Montrer que N est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

ii. On pose $S_\infty = \left\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|X\|_\infty = 1\right\}$.
Montrer qu'il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $X \in S_\infty$, $N(X_0) \leq N(X)$.

iii. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\alpha\|X\|_\infty \leq N(X)$.

c. En déduire que toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

3. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.

a. Montrer qu'il existe un réel strictement positif β tel que $N(AB) \leq n\beta\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

b. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $N(AB) \leq n\dfrac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$.

4. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{N(AX)}{N(X)},\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}.$$

a. **i.** Justifier, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.

ii. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \sup\left\{N(AX),\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\right\}$.

iii. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq \|A\|N(X)$.

c. En déduire que pour tout $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Partie II : Suites de matrices.

5. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$A_m = \left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \quad \text{et} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}.$$

Montrer que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la suite $\left(a_{i,j}^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

En cas de convergence, on écrit $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = \left(\lim\limits_{m\to+\infty}\left(a_{i,j}^{(m)}\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.

6. Soit α un réel, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_m \in \mathbb{R}$ et $\theta_m \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que

$$A_m = C_m\begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}$$

b. Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m^m$.

D'après : CNC 2017 MP (extrait).