

Devoir de contrôle N°1

Q1. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Montrer que H est monogène et, déterminer un groupe qui lui soit isomorphe.

.....

.....

.....

.....

Q2. Soit $\varphi : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que l'ordre de $\varphi(\bar{1})$ divise 3 et divise 4.

.....

.....

2. En déduire que $\varphi(\bar{1}) = \bar{0}$.

.....

3. Déterminer alors φ .

.....

.....

Q3. Soit G un groupe multiplicatif et H un sous-groupe non trivial de G . Montrer que $\langle G \setminus H \rangle = G$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Q4. Soit G un groupe multiplicatif d'ordre 4.

1. Supposons G contient un élément d'ordre 4. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

.....

.....

.....

.....

2. Supposons que G ne contient aucun élément d'ordre 4.

a. Montrer que $\forall x \in G, x^2 = e$.

.....

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Q12. Résoudre le système de congruence suivant
$$\begin{cases} 3x + 2 \equiv -1 \pmod{5} \\ 3x - 1 \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}.$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Q13. Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients entiers, on pose

$$\mathcal{I} = \left\{ (1 + X^2)A + 2XB, (A, B) \in (\mathbb{Z}[X])^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. $\mathcal{I}$ est-il engendré par un élément de $\mathbb{Z}[X]$?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Q14. Montrer que le polynôme $P = X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

.....
.....
.....
.....
.....

