

Classe préparatoire MP

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

Année scolaire 2024-2025

Programme de mathématiques de la classe préparatoire MP

1 Préambule

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires scientifiques sont conçus comme un socle cohérent et ambitieux de connaissances et de capacités, avec l'objectif de préparer les élèves à poursuivre avec succès dans les écoles et les universités un cursus de formation aux métiers d'ingénieur, d'enseignant, de chercheur.

1.1 Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Mathématiques et Physique (MP) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances, de concepts et de méthodes, et la maîtrise de techniques usuelles ;
- le développement simultané du goût du concret et des capacités de raisonnement, d'argumentation et de rigueur ;
- l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique et des attitudes de questionnement, de recherche, d'analyse et de synthèse ;
- le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations, des connaissances et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

Une formation mathématique de qualité doit développer non seulement la capacité à acquérir des connaissances et à les appliquer à des problèmes préalablement répertoriés, mais aussi l'aptitude à étudier des problèmes plus globaux ou des questions issues de situations réelles. Certaines situations nécessitent la conception d'outils nouveaux pour les traiter. Ainsi, la réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs.

Il est attendu que la pratique de la démarche et du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves et le développement de leurs compétences : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique. Enfin, l'autonomie et la prise d'initiative sont spécifiquement développées à travers la pratique d'activités du type « résolution de problèmes » qui visent à exercer les élèves à mobiliser, de façon complémentaire et coordonnée, connaissances et capacités pour répondre à un questionnement ou atteindre un but sans qu'aucune démarche de résolution ne soit fournie.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme,

tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux élèves ; il est aussi souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique d'éventuelles démarches collaboratives.

Dans ce cadre, et vue la place nouvelle des sciences numériques dans la formation des scientifiques notamment dans le domaine de la simulation, les élèves doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul scientifique et numérique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration rigoureuse et, à l'oral, celle de présenter et défendre, de manière claire et synthétique, une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés de TIPE) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques ; ce qui met en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

On attachera une importance à l'aspect géométrique des notions et propriétés étudiées en ayant régulièrement recours à des figures et croquis, ce qui permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxième année MP est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en sections (numérotées 1, 2, ...). Chaque section comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels et les capacités attendues des élèves, et délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats y sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différentes sections de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amène de développer. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte essentiellement sur l'algèbre, l'analyse et les probabilités. L'étude de chacun de ces trois domaines permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, d'établir des liens avec d'autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Le programme d'algèbre comprend trois sections. La première formalise les différentes structures algébriques usuelles rencontrées dans le programme et introduit l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme exemple de structure quotient ; on y aborde aussi l'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. La deuxième prolonge l'étude de l'algèbre linéaire abordée en classe de première année MPSI et aboutit à la réduction des endomorphismes et des matrices : diagonalisation, trigonalisation, sous-espaces caractéristiques ; cette étude combine le point de vue géométrique (éléments propres, sous-espaces stables), algébrique (polynômes d'endomorphisme) et matricielles ; les principaux résultats y sont formulés en termes d'éléments propres et de polynômes annulateurs. La troisième, située dans le cadre euclidien, étudie la notion d'adjoint et aboutit à la réduction, en

base orthonormale, des endomorphismes autoadjoints (théorème spectral) et des isométries vectorielles ; elle introduit aussi les endomorphismes autoadjoints positifs en vue de l'optimisation. Cette étude met l'accent sur les relations entre les registres vectoriel, matriciel et géométrique.

En analyse, le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé, ce qui permet d'aborder le calcul différentiel et fourni un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions, et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries entières et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude du calcul différentiel et des équations différentielles linéaires tiennent une place majeure.

L'étude de la topologie d'un espace vectoriel normé permet d'étendre les notions de suite, limite, continuité étudiées en première année dans le cadre de la droite réelle, d'étudier la continuité des applications linéaires (normes subordonnées), d'introduire les concepts de compacité et de connexité par arcs, et de mettre en évidence quelques aspects de la dimension finie : équivalence des normes, caractérisation des compacts, continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.

La section sur les séries complète l'étude des séries numériques abordée en première année et la prolonge par celles des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. L'étude des familles sommables de nombres complexes vise la mise en place des outils nécessaires à une présentation rigoureuse des espaces probabilisés et à l'étude des variables aléatoires discrètes.

La section relative aux fonctions vectorielles permet la généralisation aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie des résultats d'analyse réelle (dérivation et intégration sur un segment) étudiés en première année et fournit des outils pour les équations différentielles et le calcul différentiel ; on y aborde aussi une étude modeste des arcs paramétrés. Cette section favorise les interprétations et les représentations géométriques des objets étudiés, et fourni une occasion de relier les registres analytique et géométrique.

L'étude des suites et séries de fonctions et des différents mode de leur convergence conduit aux théorèmes de régularité de leur limite ou somme ; ces théorèmes sont ensuite appliqués notamment pour étudier la fonction exponentielle dans une algèbre normée de dimension finie ; cette étude se termine par l'énoncé de deux théorèmes d'approximation. Les séries entières permettent de construire des fonctions de variable complexe et de fournir des outils pour la résolution d'équations différentielles linéaires et pour l'expression des fonctions génératrices en probabilités.

La section sur le calcul différentiel et l'optimisation a pour objectif d'étendre l'étude menée en première année au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie et de donner une introduction à l'optimisation au premier et au second ordre. La différentielle en un point est définie de manière intrinsèque afin d'établir un lien avec l'algèbre linéaire ; les notions de dérivée selon un vecteur ou le long d'un arc, de gradient, de vecteurs tangents à une partie constituent une première approche de la géométrie différentielle ; l'optimisation au second ordre s'appuie sur les endomorphismes autoadjoints. Parallèlement à cette vision algébrique et géométrique, cette section fournit aussi des outils opérationnels pour la résolution de problèmes (recherche d'extremums, équations aux dérivées partielles).

La section sur l'intégration introduit, pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, la notion d'intégrale généralisée et celle de fonction intégrable. L'intégration des relations de comparaison dans le cas des fonctions positives permet de faire le lien avec les théorèmes similaires étudiés sur les séries. Les théorèmes classiques sur l'intégration des suites et séries de fonctions (convergence dominée, intégration terme à terme) et sur les intégrales à paramètre sont étudiés à la fin de la section ; ils fournissent les outils nécessaires pour mener l'étude d'une fonction définie comme intégrale dépendant d'un paramètre.

L'étude des équations et des systèmes différentiels linéaires, dont les interventions sont fréquentes tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques, est basée sur le théorème de Cauchy qui permet d'établir la structure de l'ensemble des solutions, illustrant la pertinence des outils de l'algèbre linéaire pour résoudre des problèmes de l'analyse. Le cas particulier où les coefficients sont constants permet notamment d'utiliser l'exponentielle d'endomorphisme et de matrice, et de mettre en œuvre des techniques de réduction.

La section consacrée à l'enseignement des probabilités présente brièvement le formalisme de Kolmogorov qui sera repris et approfondi dans le cursus post classes préparatoires. Son objectif majeur est l'étude des variables aléatoires discrètes et celle des variables à densité, ce qui permet d'élargir le champ des situations réelles se prêtant à une modélisation probabiliste.

On y étudie les bases de la théorie des probabilités : variables aléatoires, lois usuelles, notions d'indépendance et de probabilités conditionnelles, notions de moments et de fonctions génératrices ; cette section débouche sur des résultats d'approximation (loi faible des grands nombres, théorème de la limite centrée). La loi faible des grands nombres permet de justifier a posteriori l'approche fréquentiste d'une probabilité pour un schéma de Bernoulli. L'inégalité qui la sous-tend (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) précise la vitesse de convergence de cette approximation et valide l'interprétation de la variance comme indicateur de dispersion. Cette section a vocation à interagir avec le reste du programme, notamment en exploitant les séries génératrices et l'intégration sur un intervalle quelconque.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels) ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année MP est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse, de probabilité, d'algèbre et de géométrie euclidienne.

1.5 Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les sections qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale et en privilégiant

la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité¹ effective des élèves et en évitant tout dogmatisme, et ce quel que soit le temps d'enseignement proposé (cours, travaux dirigés, TIPE). En effet, l'acquisition des connaissances et le développement des capacités et des compétences sont d'autant plus efficaces que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu et les supports pédagogiques utilisés doivent motiver les élèves et favoriser la réflexion, le raisonnement, la participation et l'autonomie de ces derniers. Les situations de résolution de problèmes, de la modélisation jusqu'à la présentation des résultats en passant par la démarche de résolution proprement dite, favorisent cette mise en activité.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. “ Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn.” BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseigne-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

2 Première période

2.1 Structures algébriques usuelles

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année MPSI : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et ultérieurement de la géométrie des espaces euclidiens.

Cette section gagne à être illustré par de nombreux exemples.

Les paragraphes relatifs aux idéaux de $\mathbb{Z}$ et aux polynômes permettent de revenir sur l'étude menée en première année MPSI, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.

2.1.1 Compléments sur les groupes

Intersection de sous-groupes.

Sous-groupe engendré par une partie. Partie Exemples de parties génératrices du groupe S_n .
génératrice d'un groupe.

Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$,
générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Groupe monogène, groupe cyclique.

Groupe des racines n -ièmes de l'unité.

Tout groupe monogène infini est isomorphe au
groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini (cy-
clique) de cardinal n est isomorphe au groupe
 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Élément d'ordre fini d'un groupe G , ordre d'un tel
élément.

Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal
du sous-groupe de G engendré par x .

Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de
 G , alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x^k = e \iff d|k$.

Dans un groupe fini G , tout élément est d'ordre
fini, en plus cet ordre divise le cardinal du groupe.

Démonstration dans le cas G commutatif.

2.1.2 Compléments sur les anneaux

Produit fini d'anneaux.

Idéal d'un anneau commutatif.

Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un
idéal.

Idéal engendré par un élément.

Notation xA .

Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.

Interprétation en termes d'idéaux.

2.1.3 Idéaux de $\mathbb{Z}$

Idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$.

Définition du PGCD de $n \geq 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout. Lien avec le programme de première année.

2.1.4 Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.

Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; extension à plus de deux facteurs.

Indicatrice d'Euler φ . Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.

Théorème d'Euler.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier. Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.

Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier et $k \in \mathbb{N}^*$.

Lien avec le petit théorème de Fermat.

2.1.5 Anneaux de polynômes à une indéterminée

Dans ce paragraphe et le suivant, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Idéaux de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

Définition du PGCD de $n \geq 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.

Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Décomposition d'un élément de $\mathbb{K}[X]$ en produit d'irréductibles unitaires : existence et unicité.

Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

Par convention, le PGCD est unitaire.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

2.1.6 Structure d'algèbre

Algèbre.

Sous-algèbre.

Morphisme d'algèbres.

Les algèbres sont unitaires.

Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

2.2 Topologie des espaces normés

Cette section prolonge les notions de limites, de suites, de séries et de fonctions étudiées en première année MPSI; elle introduit la topologie des espaces vectoriels normés, ce qui permet de fournir un cadre cohérent pour l'étude de ces notions à un niveau supérieur.

Elle vise les objectifs suivants :

- introduire, dans le cadre des espaces normés, le vocabulaire de la topologie ;
- introduire la notion de compacité dans un espace normé en soulignant son intérêt dans les questions d'existence, notamment en matière d'optimisation ;
- introduire la notion de connexité par arcs dans un espace normé, qui permet de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires et intervient en calcul différentiel ;
- établir l'équivalence des normes en dimension finie et en tirer des conséquences (caractérisation de la compacité et de la convergence d'une suite bornée, continuité des applications linéaires et multilinéaires ...) ;
- donner, à travers l'étude des espaces normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, suites et séries de fonctions, équations différentielles linéaires) ;
- mettre en évidence l'idée fondamentale d'inégalité linéaire, qui apparaît lors de l'étude de la comparaison des normes et de la continuité des applications linéaires, et qui est quantifiée par la notion de norme d'opérateur.

Les différentes notions seront illustrées par des exemples variés ; on pourra ainsi travailler dans les espaces $\mathbb{K}^n$, les espaces de polynômes, d'applications linéaires ou de matrices, ainsi que dans divers espaces fonctionnels.

Les concepts étudiés ici se prêtent à des représentations issues de différents registres ; dans ce cadre, on tâchera de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment en ayant recours à de nombreuses figures. Lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- aient une bonne connaissance des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ et sur les espaces de suites, de matrices et de fonctions, sachent en établir les propriétés et soient capables de les comparer ;
- acquièrent les notions de base sur l'étude locale d'une fonction, les notions de compacité et de connexité par arcs, et connaissent les propriétés globales des fonctions continues ;
- sachent exploiter la densité pour établir des relations entre fonctions continues ;
- soient capables d'exploiter les propriétés de compacité et de connexité par arcs notamment en dimension finie.

Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach est hors programme.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2.1 Normes et espaces vectoriels normés

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Vecteurs unitaires.

Espaces vectoriels normés.

Distance associée à une norme.

Inégalité triangulaire. Distance à une partie.

Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.

On introduit ici la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.

Parties, suites et fonctions bornées.

Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.

Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Normes usuelles $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si X est un ensemble, norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$.

Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Produit fini d'espaces vectoriels normés.

$$\|A\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|,$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}, \quad A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Notation $\| \cdot \|_\infty$; norme dite infinie ou uniforme.

Notations $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$.

Norme produit.

2.2.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces normés.

Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

2.2.3 Comparaison des normes

Normes équivalentes. Invariance du caractère borné et de la convergence d'une suite par passage à une norme équivalente.

Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.

La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des élèves.

2.2.4 Topologie d'un espace vectoriel normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.

Voisinage d'un point.

Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.

Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Voisinage relatif. Caractérisation séquentielle des fermés de A .

Une boule fermée et une sphère sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.

Par définition :

- si $a \in A$, une partie U de A est un voisinage relatif de a (dans A) s'il existe V , voisinage de a dans E , tel que $U = V \cap A$.
- une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points ; caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E .
- les fermés relatifs sont les complémentaires dans A des ouverts relatifs ; caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E .

2.2.5 Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A . Caractérisation séquentielle.

Extensions de la notion de limite : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$; limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$; limite infinie en a adhérent à A pour une application à valeurs réelles.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces normés.

Opérations algébriques sur les limites.

Limite d'une composée.

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Applications continues. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes ; uniforme continuité des applications lipschitziennes.

Les élèves doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Exemple : Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, B)$, où B est une partie non vide d'un espace vectoriel normé.

2.2.6 Applications linéaires et multilinéaires continues

Critère de continuité d'une application linéaire d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F .

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors u est continue si et seulement s'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue : si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, par définition

$$\|u\| = \inf \{C > 0 ; \forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|\}.$$

Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$ de l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Notations $\|u\|$, $\|u\|_{op}$; on a :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F \text{ et}$$

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur : si u et v sont deux applications linéaires continues, alors $v \circ u$ l'est aussi et on a $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$.

Critère de continuité des applications multilinéaires.

Adaptation aux matrices.

Les normes usuelles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes d'opérateurs sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La démonstration n'est pas exigible.

2.2.7 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition d'une partie compacte K par la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite d'élément de K possède une valeur d'adhérence dans K .

Théorème de Heine.

Une partie compacte est fermée et bornée.

Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Produit d'une famille finie de compacts.

Image d'une partie compacte par une application continue.

Théorème des bornes atteintes pour une application à valeurs réelles définie et continue sur un compact non vide.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

Toute application continue sur une partie compacte est uniformément continue.

L'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

2.2.8 Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé

Arc (ou chemin continu) joignant deux points. Parties connexes par arcs.

Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Image continue d'une partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie A de E . Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs de la partie A .

Dans des cas simples, un dessin convaincant vaut preuve de connexité par arcs.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

2.2.9 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans un espace normé F est continue.

Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces normés de dimensions finies.

Démonstration non exigible.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

$$\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F).$$

Exemple : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

2.3 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année MPSI. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov, ...). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction ; trois objectifs sont visés :

- *consolider et approfondir les acquis de la classe de première année MPSI relatifs à l'étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire notamment en dimension finie ;*

- étudier la réduction des endomorphismes et des matrices ;
- exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Les approches ou méthodes qui y sont présentées sont de deux types : les unes, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les autres, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- acquièrent les notions de base sur la réduction des endomorphismes et des matrices (éléments propres, sous-espace stable, polynôme d'endomorphisme et de matrice, polynôme annulateur) ;
- puissent mettre en œuvre ces notions pour mener l'étude, dans des cas standard, de la diagonalisation et la trigonalisation des matrices et des endomorphismes, en dimension finie ;
- soient capables d'exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, on se limitera dans cette section au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Dans la pratique, on se limitera au cas où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2.3.1 Compléments d'algèbre linéaire

Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Caractérisation par la dimension des sommes directes d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels : si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i),$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

Matrices définies par blocs.

Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Base adaptée à une décomposition en somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels de E .

Adaptation au cas $p = 2$.

Interprétation géométrique des blocs.

Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Transvections par blocs. Invariance du déterminant. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

2.3.2 Sous-espaces stables ; éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Sous-espace F stable par un endomorphisme u de E . Endomorphisme u_F de F induit par u . Somme et intersection de sous-espaces stables par u .

Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini de cardinal au plus n .

Si deux endomorphismes u et v commutent, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .

Rappels sur les matrices semblables.

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base de E adaptée à F ; caractérisation des endomorphismes stabilisant des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition.

Un vecteur propre est non nul.

Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.

Éléments propres d'un projecteur, d'une symétrie.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

En particulier, tout sous-espace propre de u est stable par v .

Interprétation géométrique.

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.

Deux matrices semblables ont même spectre.

Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{L}$.

2.3.3 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Notations χ_A, χ_u . Par convention, le polynôme caractéristique est unitaire; valeurs des coefficients des monômes de degrés 0 et $n - 1$ dans χ_u, χ_A .

Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique ; le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Les racines du polynôme caractéristique dans le corps de base $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres.

Multiplicité d'une valeur propre. Le sous-espace propre associé à une valeur propre λ est de dimension inférieure ou égale à la multiplicité de λ .

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

Si le polynôme caractéristique χ_u est scindé, la somme et le produit des valeurs propres de u , comptées avec leur multiplicité, sont égaux à la trace et au déterminant de u respectivement.

2.3.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E .

Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.

Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Interprétation en termes d'endomorphisme : pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

Traduction matricielle.

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Traduction matricielle.

Cas où χ_u est scindé à racines simples.

2.3.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Interprétation géométrique.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Interprétation en termes d'endomorphisme : pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.

Interprétation dans le registre matriciel.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

2.3.6 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .

Indice de nilpotence.

Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.

2.3.7 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.

Si d est le degré du polynôme minimal de u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Si $u(x) = \lambda x$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Les racines du polynôme minimal π_u de u dans le corps de base $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u .

Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M , sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le polynôme minimal est unitaire.

Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$.

En particulier, si P est un polynôme annulateur de u , toute valeur propre de u est racine de P .

2.3.8 Lemme de décomposition des noyaux

Lemme de décomposition des noyaux.

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P , alors $\text{Ker}(P(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_r(u))$.

2.3.9 Application à la réduction de la notion de polynôme annulateur

Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u , ou encore si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples (ou simplement scindé.).

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit.
Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé.

Interprétation de ce résultat dans le registre matriciel.

Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable u dont les sous-espaces propres sont $F_1, \dots, F_r : u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r$, où $(p_1, \dots, p_r)$ est la famille des projecteurs associés à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$; de plus, $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \dots + P(\lambda_r)p_r$.

Interprétation de ce résultat dans le registre matriciel.

2.3.10 Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques

Théorème de Cayley-Hamilton.

Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u .

Traduction matricielle de cette décomposition.

Démonstration non exigible.

En particulier, E est somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Dimension d'un sous-espace caractéristique.

Similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.

2.4 Séries dans un espace normé de dimension finie; familles sommables

L'objectif de cette section est triple :

- étendre la notion de série convergente au cadre des espaces normés de dimension finie, en particulier aux espaces d'endomorphismes et de matrices ; ce qui permet de compléter et consolider les acquis de première année MPSI relatifs aux séries numériques ;
- définir l'exponentielle d'endomorphismes et de matrices carées ;
- introduire la notion d'ensemble dénombrable et de famille sommable de nombres réels ou complexes ; cette notion sera utile notamment pour l'étude des probabilités.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves acquièrent des notions de base sur les séries d'éléments d'un espace normé de dimension finie et la sommabilité notamment en vue d'étudier les problèmes d'interversion de sommation.

2.4.1 Révisions sur les séries numériques

Il est recommandé de faire des rappels de cours et des exercices de révision sur les séries numériques avant d'entamer l'étude des séries dans un espace normé de dimension finie.

Comparaison de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ sont de même nature.

Les élèves doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.

Exemples classiques, séries de RIEMANN.

Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.

La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesaro (pour une limite finie ou infinie).

Exemples d'utilisation de la formule de sommation par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une série non absolument convergente à celle d'une série absolument convergente.

Formule de sommation par parties :

$$(a_0 - a_1)b_1 + (a_1 - a_2)b_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)b_n = a_0b_1 - a_1(b_1 - b_2) - \cdots - a_{n-1}(b_{n-1} - b_n) - a_nb_n.$$

2.4.2 Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Convergence, convergence absolue

Série d'éléments d'un espace normé de dimension finie. Sommes partielles. Convergence, divergence.

Somme et restes d'une série convergente.

$\sum_n u_n$ désigne la série de terme général u_n , on dit aussi série associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lorsqu'une série $\sum_n u_n$ est convergente, on note

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la somme de la série et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ désigne son reste d'ordre n .

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Espace vectoriel des séries convergentes ; linéarité de la somme.

Lien entre suite et série, séries télescopiques.

La suite $(u_n)_n$ et la série $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

Série absolument convergente.

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente ; inégalité triangulaire.

Le critère de Cauchy est hors programme.

Application à la série géométrique de Neumann et à la fonction exponentielle

Cas d'une algèbre normée de dimension finie : série géométrique de Neumann, application exponentielle dans une telle algèbre.

Cas particuliers d'un nombre complexe, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie, d'une matrice carrée réelle ou complexe. Exponentielle d'une matrice diagonale ; exponentielle de matrices semblables ; spectre de $\exp(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notations $\exp(a)$, e^a pour $a \in \mathcal{A}$ et $\exp(A)$, e^A pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie ayant e pour élément unité alors :

- si $a \in \mathcal{A}$ est tel que $\|a\| < 1$, la série géométrique de Neumann $\sum_{n \geq 0} a^n$ ($a^0 := e$) est absolument convergente, $e - a$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$.

- de même, pour tout $u \in \mathcal{A}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente ; sa somme se note $\exp u$ et s'appelle l'exponentielle de u :

$$\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

2.4.3 Familles sommables de nombres complexes

On introduit ici la notion d'ensemble dénombrable et de famille sommable, de nombres réels ou complexes, indexée par un tel ensemble. Il s'agit d'une extension de la notion de série absolument convergente basée sur le fait que pour une telle série, la structure d'ordre de $\mathbb{N}$ n'intervient pas pour en calculer la somme.

L'étude des familles sommables fournit un cadre permettant de sommer « en vrac » une famille infinie et procurant ainsi un grand confort de calcul. Dans le cas d'une famille positive, le calcul dans $[0, +\infty]$ se suffit à lui-même et contient l'étude de la sommabilité. Dans le cas d'une famille quelconque, il est préconisé de commencer d'abord par un calcul formel à justifier dans un second temps.

Ensembles dénombrables

Ensemble dénombrable, au plus dénombrable.

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$; il est dit au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ est dénombrable ; les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout entier $p \geq 2$.

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables (resp. au plus dénombrables) est dénombrable (resp. au plus dénombrable).

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Soit I un ensemble au plus dénombrable. Si $(F_i)_{i \in J}$ est une partition de I (ce qui impose $F_i \neq \emptyset$), alors J est au plus dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Résultat admis.

Démonstration non exigible.

Familles sommables de nombres réels positifs

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme étant la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .

Invariance de la somme par permutation de I .

La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$; cela revient à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour toute partie finie F de I , on ait $0 \leq \sum_{i \in F} u_i \leq M$.

Le support d'une famille sommable $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est au plus dénombrable.

Critère de comparaison.

Opérations : somme, multiplication par un réel positif.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$.

Rappelle des propriétés basiques :

$\forall a \in \mathbb{R}, a < +\infty, (+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$
et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Toute partie non vide de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure ; $+\infty = \max[0, +\infty]$.

La somme est notée $\sum_{i \in I} u_i$.

Cas où I est fini : la définition est cohérente.

Cas où $I = \mathbb{N}$: lien avec les séries ; si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge, il est pratique d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Si $\sigma : I \rightarrow I$ est une bijection, alors les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(u_{\sigma(j)})_{j \in I}$ ont la même somme :

$$\sum_{j \in I} u_{\sigma(j)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité.

Le support de $(u_i)_{i \in I}$ est par définition l'ensemble $S = \{i \in I ; u_i \neq 0\}$. On a $S \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} I_p$, où $I_p = \{i \in I ; x_i > \frac{1}{p}\}$, et les I_p sont finis.

On se restreindra par la suite au cas où le domaine d'indexation I est au plus dénombrable.

Si $0 \leq u_i \leq v_i$, pour tout $i \in I$, alors :

- la sommabilité de la famille $(v_i)_{i \in I}$ entraîne celle de $(u_i)_{i \in I}$ et on a $0 \leq \sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

- la non sommabilité de la famille $(u_i)_{i \in I}$ entraîne la non sommabilité de $(v_i)_{i \in I}$.

La démonstration est hors programme.

Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.

Cas des suites doubles ($I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) : interversion des sommations.

Familles sommables de nombres complexes

Famille sommable de nombres réels ou complexes.

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite sommable si la famille $(|u_i|)_{i \in I}$ l'est, c'est-à-dire si $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Somme d'une telle famille (cas réel, cas complexe).
Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\varepsilon > 0$, alors il existe une partie finie F de I telle que $|\sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i| < \varepsilon$.

Si la famille $(u_k)_{k \in I}$ est réelle, sa somme est définie comme étant la différence des sommes des familles, de réels positifs, composées par ses parties positive et négative :

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} u_k^+ - \sum_{k \in I} u_k^-;$$

dans le cas général, sa somme est définie par

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k).$$

Lorsque $I = \mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum_n u_n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente, auquel cas $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.

Si $(v_i)_{i \in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble (dénombrable I) et $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection, alors la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(v_{\sigma(j)})_{j \in I}$ est sommable, auquel cas $\sum_{j \in I} v_{\sigma(j)} = \sum_{i \in I} v_i$.

Critère suffisant de sommabilité : critère de comparaison.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et soit $(v_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Espace vectoriel des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; linéarité de la somme, inégalité triangulaire. Sous famille d'une famille sommable.

Notation $\ell^1(I)$.

Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable alors

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|.$$

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, et si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de complexes, alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right).$$

Critère suffisant de sommabilité.

Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ sont sommables alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right).$$

Application au produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition du produit de Cauchy de deux séries de nombres complexes.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes : si les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum_{n \geq 0} c_n$ l'est aussi et la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Application : si u et v sont deux éléments commutables d'une algèbre normée de dimension finie $\mathcal{A}$, alors $\exp(u+v) = \exp(u) \exp(v)$
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes, de deux matrices carrées, qui commutent.

En particulier, la famille $\left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$ est sommable et elle a la même somme que $(u_i)_{i \in I}$.
La démonstration est hors programme.

On vérifie l'hypothèse de sommabilité d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ en appliquant le théorème de sommation par paquets, énoncé pour les familles de réels positifs, à la famille $(|u_i|)_{i \in I}$.

Cas des suites doubles (intersion des sommations) : si la famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ de complexes est sommable, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right)$$

qui vaut aussi la somme de la famille.

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

La série $\sum_{n \geq 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, est appelée la série produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$.

Dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$ qui vaut aussi la somme de la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Si $S_n(w) = \sum_{k=0}^n \frac{w^k}{k!}$, $w \in \mathcal{A} \cup \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\|S_n(u)S_n(v) - S_n(u+v)\| \leq S_n(\|u\|)S_n(\|v\|) - S_n(\|u\| + \|v\|)$$

2.5 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Cette section poursuit quatre objectifs :

- consolider les acquis de première année MPSI concernant la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes et étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ;
- préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;
- définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans un espace normé de dimension finie, en établir les principales propriétés puis en déduire l'inégalité des accroissements finis et les formules de Taylor ;
- fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et le calcul différentiel.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- connaissent et sachent exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point ;
- soient capables de mener l'étude de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie et en particulier d'en établir les propriétés liées à la continuité, à la dérivabilité et à la classe C^k , $k \in \mathbb{N}^*$;
- connaissent la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange) ;

Les fonctions étudiées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie F .

2.5.1 Dérivation

Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Dérivabilité d'une fonction en un point.

Définition par le taux d'accroissement ; caractérisation par le développement limité à l'ordre 1.

Traduction en termes de coordonnées dans une base.

Interprétation cinématique, vitesse instantanée. Caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'une base de F ; expression des composantes de la dérivée en un point.

Dérivabilité sur un intervalle, application dérivée.

Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables, $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
linéarité de la dérivation.

Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $L \circ f$ où L est une application linéaire de F dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dérivabilité et dérivée d'une application de la forme $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ où B est une application bilinéaire, ou de la forme $M(f_1, \dots, f_p) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ où M est une application multilinéaire.

Cas du produit scalaire et du carré de la norme d'un espace euclidien ; cas du déterminant.

Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

La dérivée de $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est l'application $t \mapsto B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$.

Si $(F, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne, la dérivée de $t \mapsto (f(t)|g(t))$ est l'application $t \mapsto (f'(t)|g(t)) + (f(t)|g'(t))$, celle de $t \mapsto \|f(t)\|^2$ est $t \mapsto 2(f'(t)|f(t))$.

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

Dérivées d'ordre supérieur

Applications k fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Dérivée k -ième d'une application de la forme $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$, B étant une application bilinéaire : si f et g sont k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) alors $B(f, g)$ l'est aussi. Expression de la dérivée k -ième de $B(f, g)$: formule de Leibniz.

La composée $f \circ \varphi$ d'une application $f : I \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une application φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

Interprétation cinématique de la dérivée seconde, accélération.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F , algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles ou complexes, $0 \leq k \leq +\infty$.

$$(B(f, g))^{(k)}(t) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}(t), g^{(k-p)}(t)), t \in I.$$

2.5.2 Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F .

Propriétés de l'intégrale : linéarité, additivité (relation de Chasles), composition par une application linéaire entre espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Si L est une application linéaire de F dans un espace vectoriel de dimension finie alors $L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$.

Inégalité triangulaire : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Sommes de Riemann associées à une subdivision de pas constant.

On peut établir cette inégalité, évidente pour les fonctions en escalier, en admettant le résultat d'approximation de f , uniformément sur $[a, b]$, par une suite de fonctions en escalier.

Si $f : [a, b] \rightarrow F$ est continue par morceaux, alors
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Intégrale fonction de sa borne supérieure et applications

Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ pour f continue.

Théorème fondamental du calcul intégral : toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive.

Rappel des techniques de calcul de primitives notamment dans le cas des fonctions numériques.

f étant une fonction continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I . C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a . De plus pour toute primitive G de f sur I

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t) dt.$$

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $\|f'(t)\| \leq M$, pour tout $t \in [a, b]$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$.

Formules de Taylor

Formules de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Le résultat de Taylor-Young est local, contrairement aux autres résultats. Les hypothèses des résultats globaux sont plus fortes.

2.6 Suites et séries de fonctions

Cette section vise trois objectifs :

- définir les modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions) ;
- exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite (interversión des limites, continuité, dérivation, intégration) ;
- aborder la thématique de l'approximation uniforme sur un segment par le biais de deux théorèmes, choisis pour leur intérêt intrinsèque et susceptibles de nombreuses applications.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- soient capables de mener l'étude de la convergence d'une suite ou d'une série de fonctions et en maîtrisent les techniques ;
- soient en mesure de mettre en œuvre ces techniques et les exploiter pour l'étude des propriétés de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) de fonctions (régularité, étude asymptotique, comparaison série-intégrale) ;
- puissent exploiter les résultats obtenus lors de la mise en place des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires (fonction exponentielle).

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.6.1 Modes de convergence d'une suites ou d'une séries de fonctions

Convergence simple d'une suite ou d'une série d'applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel normé de dimension finie F .

Convergence uniforme d'une suite ou d'une série d'applications de X dans F .

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Une série de fonctions converge uniformément si, et seulement si, elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Convergence normale d'une série d'applications de X dans F . La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.

Les notions de convergence simple et uniforme d'une série de fonctions sont définies via la suite de ses sommes partielles.

Dans l'espace $\mathcal{B}(X; F)$ des applications bornées de X dans F , muni de la norme de la convergence uniforme, interprétation de la convergence uniforme en terme de norme.

2.6.2 Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite

X désigne ici une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie E .

Théorème d'interversion des limites (double limite) : soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de X dans F convergeant uniformément vers f sur X , a un point de E adhérent à X ; si, pour tout $n \geq 0$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a , alors la suite $(\ell_n)_{n \geq 0}$ admet une limite $\ell \in F$ et on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$; autrement dit

Démonstration non exigible.

Adaptation, si X est un intervalle non majoré (resp. non minoré) de $\mathbb{R}$, au cas où $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$).

Extension du théorème et de son adaptation au cas des séries de fonctions : interversion d'une limite et d'une somme.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Théorème de continuité :

Continuité en $x_0 \in X$ de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) d'applications de X dans F , continues en x_0 , convergeant uniformément sur un voisinage de x_0 .

Continuité de la limite d'une suite (ou de la somme d'une série) uniformément convergente d'applications continues de X dans F .

Le théorème s'applique aussi dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Application : Dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, continuité, sur la boule unité $\|a\| < 1$, de l'application $a \mapsto (e - a)^{-1}$ et sur $\mathcal{A}$ de l'application exponentielle $a \mapsto \exp(a)$.

Intégration d'une limite uniforme sur un segment :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues de I dans F . On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une fonction $f : I \rightarrow F$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans I , on pose : $g_n(x) = \int_{x_0}^x f_n$ et $g(x) = \int_{x_0}^x f$. Alors la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g sur tout segment contenu dans I .

En particulier, si la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur le segment J , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n = \int_J f.$$

Adaptation au cas des séries de fonctions : théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément.

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans F . On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow F$ et que la suite $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur tout segment contenu dans I vers une fonction $h : I \rightarrow F$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur tout segment contenu dans I , f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de la suite $(f_n^{(p)})_{n \geq 0}$ pour tout $p \in \{0, \dots, k-1\}$ et de convergence uniforme de la suite $(f_n^{(k)})_{n \geq 0}$ sur tout segment contenu dans I .

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Adaptation au cas des séries de fonctions : théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$; extension aux séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Application : Dérivation, si a est un élément d'une algèbre normée de dimension finie, de l'application

$$e_a : t \mapsto \exp(ta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^n, \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

$e'_a(t) = \frac{d}{dt}[\exp(ta)] = a \exp(ta) = \exp(ta)a$; en particulier e_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Relation $e_a(t+s) = e_a(t)e_a(s) = e_a(s)e_a(t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

2.6.3 Approximation uniforme

Approximation uniforme d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow F$, continue par morceaux sur $[a, b]$, par des fonctions en escalier.

Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment γ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. Démonstration non exigible.

2.7 Séries entières

Les séries entières constituent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, expressions des fonctions génératrices en probabilités, ... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Dans ce cadre, cette section vise trois objectifs :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence ;*
- *introduire la notion de développement d'une fonction en série entière (série de Taylor) ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- *puissent déterminer le rayon de convergence d'une série entière dans des cas standard ;*
- *connaissent les propriétés d'une telle série et celles de sa somme (domaines de convergence simple, uniforme et normale ; continuité de la somme ; dérivation et intégration terme à terme) ;*
- *connaissent les développements en série entière usuels et sachent les exploiter pour exprimer la somme d'une série de fonctions ou les solutions d'une équation à l'aide des fonctions élémentaires.*

Les coefficients des séries entières considérées ici sont réels ou complexes.

Pour tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$; si $0 < r < +\infty$, $D(0, r)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon r ; par abus de langage, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

2.7.1 Rayon de convergence d'une série entière

Notion de série entière associée à une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes. Notation $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ est bornée alors, pour tout nombre complexe $z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R_a ou R d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Disque ouvert $D(0, R)$ de convergence ; intervalle ouvert $] - R, R[$ de convergence.

Si $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$; en particulier, si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$ et si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et sa série entière dérivée

$\sum_{n \geq 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon de convergence.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Il est défini comme étant la borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ soit bornée.

La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente si $|z| < R$; elle est grossièrement divergente si $|z| > R$.

Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n^\alpha z^n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Usage de la suite $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq 0}$ si elle est définie et admet une limite dans $[0, +\infty]$.

Minoration des rayons de convergences ; linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

2.7.2 Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

La convergence d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R .

Continuité de la somme d'une telle série sur son disque ouvert de convergence.

En particulier, la convergence est normale sur tout compact contenu dans $D(0, R)$.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

2.7.3 Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Théorème d'Abel radial : si la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R \in [0, +\infty[$ et si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge, alors la fonction

$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, définie sur $] - R, R[$, admet

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ pour limite à gauche en R .

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

La démonstration est hors programme.

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme : avec les notations précédentes, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Si $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, une primitive sur l'intervalle $] -R, R[$ de la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ s'obtient en intégrant terme à terme la série définissant f .

La fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n t^{n-k}, \quad t \in] -R, R[.$$

Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0 (ou simplement sur $]0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$), alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.7.4 Développement d'une fonction en série entière, développements usuels

Fonction développable en série entière au voisinage d'un point.

Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R .

Développement de $z \mapsto e^z$ sur $\mathbb{C}$; développement de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ sur $D(0, 1)$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, $r > 0$.

Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $] -r, r[$, $r > 0$.

Développements usuels dans le domaine réel.

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Une telle fonction est en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $] -r, r[$.

Les élèves doivent connaître les développements en série entière en 0 des fonctions $t \mapsto e^{ta}$ ($a \in \mathbb{C}$), $t \mapsto \sinh t$, $t \mapsto \cosh t$, $t \mapsto \sin t$, $t \mapsto \cos t$, $t \mapsto \arctan t$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Ils doivent également être capables de déterminer un développement en série entière à l'aide d'une équation différentielle.

3 Seconde période

3.1 Endomorphismes d'un espace euclidien

L'objectif de cette section est triple :

- *consolider les acquis de première année MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et les espaces euclidiens ;*
- *approfondir, dans le cadre euclidien, la thématique de la réduction des endomorphismes, à travers l'étude des endomorphismes autoadjoints et des isométries (endomorphismes orthogonaux) ;*
- *introduire la notion d'endomorphisme autoadjoint positif, notamment en vue de l'optimisation au second ordre en calcul différentiel.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- *maîtrisent les notions de bases sur le produit scalaire, sachent orthogonaliser une famille libre (indexée par une partie de $\mathbb{N}$) d'un espace préhilbertien au moyen de l'algorithme de Gram-Schmidt, et soient capables d'exprimer la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ;*
- *maîtrisent, dans le cas euclidien, les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel ;*

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

3.1.1 Rappels et compléments sur les espaces préhilbertiens réels

Il est recommandé de faire des rappels de cours et des exercices de révision sur les espaces préhilbertiens réels avant d'entamer l'étude des endomorphismes d'un espace euclidien. Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans ce paragraphe.

Dans un espace préhilbertien, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Caractérisation métrique du projeté orthogonal.

Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Suites orthogonales, suites orthonormales $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Inégalité de Bessel : si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale, alors, pour tout $x \in E$, la suite $(\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est de carré sommable et on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Rappels de première année.

Caractérisation du projeté orthogonal comme solution d'un problème de minimisation de distance.

Exemples de suites orthogonales de polynômes et de construction de telles suites par le procédé d'orthogonalisation de GRAM-SCHMIDT.

3.1.2 Formes linéaires d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme

Théorème de représentation des formes linéaires sur un espace euclidien E . Isomorphisme canonique entre E et l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .

Pour toute forme linéaire φ sur un espace euclidien E , il existe un et un seul vecteur x tel que

$$\forall y \in E, \quad \varphi(y) = \langle x, y \rangle.$$

Adjoint d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel euclidien E .

Si u est un endomorphisme de E , il existe un unique endomorphisme de E , noté u^* , tel que

Noyau, image et rang de u^* : $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$, $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ et $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.

Traduction matricielle dans une base orthonormale.

Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée.

Si le sous-espace F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

3.1.3 Matrices orthogonales

Matrice orthogonale : définition par ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée.

Groupe orthogonal.

Matrices orthogonalement semblables.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Groupe spécial orthogonal.

Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Pour E euclidien orienté, si e et e' sont deux bases orthonormées directes (b.o.n.d.) de E , égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.

3.1.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Isométries vectorielles d'un espace euclidien : définition par la linéarité et la conservation des normes.

On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».

Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.

Caractérisation des isométries vectorielles de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une (de toute) base orthonormée, par la relation $u^*u = id_E$.

Lien entre les notions de base orthonormale, d'isométrie et de matrice orthogonale : caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale ; changement de base orthonormale.

Groupe orthogonal.

Déterminant d'une isométrie ; déterminant d'une réflexion. Isométrie directe ou positive (rotation), indirecte ou négative.

Groupe spécial orthogonal.

Notation $O(E)$.

Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormée directe.

Notation $SO(E)$.

3.1.5 Isométries vectorielles en dimension 2

Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.

Matrice de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ associée à un nombre réel θ . Morphisme canonique $\theta \mapsto R(\theta)$ de $\mathbb{R}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.

Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté : matrice dans une base orthonormée directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation.

Classification des isométries d'un plan euclidien.

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$. Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

La matrice d'une rotation dans une b.o.n.d. est indépendante de la b.o.n.d. choisie.

On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.

Dans un plan euclidien E , toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation ; décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions dont l'une est choisie arbitrairement.

Le groupe $SO(E)$ est commutatif.

3.1.6 Réduction des isométries vectorielles

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie vectorielle.

Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormée.

Cas particulier : réduction d'une isométrie directe u d'un espace euclidien E de dimension 3.

Matrice d'une rotation, d'un espace euclidien de dimension 3, dans une base orthonormée adaptée à son axe.

Si u est une isométrie de E , l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u .

Traduction matricielle.

$1 \in \text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u vaut

$$\text{soit } I_3 \text{ soit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques caractéristiques d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ n'est pas attendu du programme.

3.1.7 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Endomorphisme autoadjoint.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Caractérisation du caractère autoadjoint par sa matrice en base orthonormée.

Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.

Théorème spectral : un endomorphisme u d'un espace euclidien E est autoadjoint si, et seulement si, il est diagonalisable dans une base orthonormée si, et seulement si, E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u .

Traduction matricielle du théorème spectral.

L'endomorphisme u est dit autoadjoint si $u^* = u$.

Si u est autoadjoint, alors l'orthogonal d'un sous-espace stable par u est aussi stable par u .

L'endomorphisme u est autoadjoint si, et seulement si, sa matrice dans une (toute) base orthonormée est symétrique.

La terminologie « endomorphisme symétrique » sera mentionnée tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$.

Si p est un projecteur de E euclidien, alors p est autoadjoint si, et seulement si, p est une projection orthogonale, ie $\text{Im } p = (\text{Ker } p)^\perp$.

En particulier, si u est autoadjoint alors son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u .

Une matrice carrée réelle est symétrique si, et seulement si, elle est orthogonalement diagonalisable.

3.1.8 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.

Un endomorphisme autoadjoint u est dit positif (resp. défini positif) si pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle \geq 0$ (resp. pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x), x \rangle > 0$).

Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Caractérisation spectrale.

Un endomorphisme autoadjoint est positif (resp. défini positif) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Matrice symétrique positive, définie positive.

Caractérisation spectrale.

Une matrice carrée, réelle et symétrique est positive (resp. définie positive) si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

3.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif de cette section est double :

- étudier les suites et les séries de fonctions intégrables, grâce au théorème de convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions ;

- appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre (théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$).

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves connaissent ces théorèmes et soient en mesure de les exploiter notamment pour mener l'étude de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre ; cette exploitation suppose en particulier la capacité à en vérifier les conditions d'application en insistant d'abord sur les hypothèses importantes (hypothèse de domination, hypothèse de convergence, hypothèse d'intégrabilité ou de sommabilité, ...) mais pas autant sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Il est recommandé de commencer cette section par des rappels de cours et des exercices de révision sur l'intégration sur un intervalle quelconque, vue en première année MPSI, et de privilégier l'étude d'exemples significatifs (intégrales eulériennes, transformées de Fourier, transformées de Laplace, ...) en évitant les situations artificielles et les exercices de pure virtuosité technique.

Les fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

3.2.1 Passage à la limite sous l'intégrale

Théorème de convergence dominée :

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration.

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs complexes. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I , telle que pour tout entier n , $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\lim_n \int_I f_n = \int_I f$.

Extension au cas d'une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

La démonstration est hors programme.

Les hypothèses de domination et de convergence simple sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux de f ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Intégration terme à terme d'une séries de fonctions :

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à la variable d'intégration.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions positives, continues par morceaux et intégrables sur I telle que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f , continue par morceaux sur I . Alors, dans $[0, +\infty]$, on a l'égalité :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur I telle que la série $\sum_n f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f , continue par morceaux sur I , et que la série $\sum_n \left(\int_I |f_n| \right)$ soit convergente. Alors, la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

La démonstration est hors programme.

En particulier, l'intégrabilité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n$.

La démonstration est hors programme.

Les hypothèses de convergence simple et de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (\int_I |f_n|)$ sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux de f .

On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables.

On présentera des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

3.2.2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à la variable t d'intégration.

Théorème de continuité : Soient A une partie d'un espace vectoriel de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$; on suppose que f est continue par rapport à x et continue par morceaux par rapport à t . S'il existe une fonction positive φ , continue par morceaux et intégrable sur I , telle que, pour tout élément (x, t) de $A \times I$, $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination), alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Les hypothèses de domination et de continuité par rapport à x sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée de façon locale.

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de dérivation (classe $\mathcal{C}^1$) : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : (x, t) \mapsto f(x, t)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $J \times I$. On suppose que :

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J ;
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout $(x, t) \in J \times I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et on a la formule de LEIBNIZ suivante :

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale dépendant d'un paramètre, sous l'hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, \cdot)$, pour tout x de J et tout $0 \leq p \leq k - 1$, et domination sur tout segment contenu dans J de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$.

Les hypothèses de domination et de régularité de f par rapport à x sont plus importantes que l'hypothèse de continuité par morceaux ; cette dernière étant imposée par les limitations du programme.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment contenu dans J , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

3.2.3 Exemples d'applications

Exemples d'emploi du théorème de convergence dominée et du théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions intégrables.

Exemples significatifs d'étude de fonctions définies comme intégrales dépendant d'un paramètre : régularité, étude asymptotique.

Intégrales eulériennes, transformées intégrales (facteur d'échelle, retard, amortissement, valeur initiale ou finale, ...).

3.3 Probabilités

Dans cette section, on introduit le cadre général du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités vu en première année est trop limité pour aborder les problèmes intéressants et autoriser des variables aléatoires non bornées par exemple. Le vocabulaire usuel est proposé, partant de la notion fondamentale d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; il ne s'agit pas d'étudier les problèmes théoriques sous-jacents à cette axiomatisation mais seulement de pouvoir disposer d'un cadre simple permettant d'effectuer les calculs et les raisonnements nécessaires lors de l'étude de phénomènes où le hasard intervient.

Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices ; l'objectif est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les élèves sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices ...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov ...).

Les problèmes, les exemples, les sujets traités lors de travaux dirigés doivent tenir compte de cet objectif de simplicité. L'utilisation de l'informatique est fortement recommandée pour illustrer les situations probabilistes, pour simuler des variables aléatoires et expérimenter sur des problèmes réels correctement modélisés.

On notera que ce cadre général conduit à des problèmes de convergence (suites, séries, familles sommables, intégrales) et qu'il est important de rappeler, au moment opportun, les résultats du cours d'analyse correspondants.

La section est organisée autour des axes suivants :

- consolider les acquis de première année MPSI sur les variables aléatoires discrètes finies et la compléter par l'étude des variables aléatoires discrètes infinies et des variables à densité ;
- introduire les notions de fonction de répartition, de moments et de fonction génératrice, et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les définitions et résultats du cours sur des exemples simples ;
- étudier des exemples usuels de lois discrètes réelles (loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique, loi de Poisson, ...) et de lois à densité sur $\mathbb{R}$ (loi uniforme, loi exponentielle, loi gamma, loi gaussienne (ou normale), ...);
- étudier la notion de convergence et quelques théorèmes limites.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- aient étudié des exemples usuels de lois discrètes réelles et de lois à densité ;
- sachent reconnaître les situations classiques de modélisation par des lois discrètes ou à densité usuelles ;
- sachent utiliser les fonctions génératrices pour déterminer la loi ou calculer les moments d'une variable aléatoire discrète dans des cas standard ;
- soient capables de déterminer la densité d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition ;
- apprennent à utiliser le produit de convolution pour déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, discrètes ou à densité ;
- apprennent à approcher, sous certaines conditions, une loi binomiale par une loi de Poisson, et une loi hypergéométrique par une loi binomiale ;
- sachent utiliser les théorèmes limites, dans des cas standard, pour donner des estimations à certains paramètres (espérance, variance, ...).

3.3.1 Espaces probabilisés

Le préfixe σ utilisé dans σ -algèbre ou σ -additif renvoie au caractère dénombrable des opérations permises. La lettre σ est utilisée classiquement aussi pour désigner l'écart-type, racine carrée de la variance.

Tribu $\mathcal{A}$ d'événements sur un univers Ω ; espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Événement : on appelle ainsi toute partie de Ω qui est élément de la tribu $\mathcal{A}$.

On fera remarquer aussi que choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas nécessairement une bonne solution. Ce choix augmente les contraintes à vérifier pour l'existence de probabilités.

Système complet fini ou dénombrable d'événements.

Tribu engendrée par un système complet fini ou dénombrable d'événements.

Définition d'espace probabilisé, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Propriétés de la continuité monotone séquentielle : si $(A_k)_{k \geq 1}$ est une suite d'événements croissante (resp. décroissante) pour l'inclusion alors $P(\cup_{k=1}^{+\infty} A_k)$ (resp. $P(\cap_{k=1}^{+\infty} A_k)$) est égale à $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(A_k)$.

Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

Notion de probabilité conditionnelle.

On obtient un nouvel espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$.

Formule des probabilités composées; formule des probabilités totales; formule de Bayes.

Le terme σ -algèbre est aussi employé. On ajoute à la notion rencontrée dans le cas fini la possibilité de réunir ou d'intersecter une famille dénombrable d'événements. Cela est indispensable pour de nombreuses raisons, par exemple : pour considérer des situations où l'on répète un jeu, sans fixer a priori un nombre maximum de répétitions, pour envisager le comportement asymptotique de probabilités ...

Famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω .

Existence admise.

Une probabilité P est une application σ -additive de $\mathcal{A}$ vers $[0, 1]$ qui vérifie $P(\Omega) = 1$.

Conséquence immédiate :

pour toute suite d'événements $(B_k)_{k \geq 1}$ on a

$$P(\cap_{k=1}^{+\infty} B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\cap_{k=1}^n B_k),$$

$$P(\cup_{k=1}^{+\infty} B_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\cup_{k=1}^n B_k).$$

On parle aussi d'événement quasi-certain et de propriété presque sûre. L'adjectif négligeable est utilisé pour le contraire d'une propriété presque sûre, i.e. pour un événement de probabilité 0.

On pourra donner comme exemple d'événement négligeable la réalisation d'une suite infinie de PILE lors d'un jeu de PILE ou FACE.

On conditionne par un événement A de probabilité non nulle, on parle de probabilité sachant A et on écrit P_A ou parfois $P(\cdot | A)$.

Pour la formule des probabilités totales on considère un système complet d'événements en nombre fini ou dénombrable : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables, alors pour tout événement B on a : $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)$.

Événements indépendants; indépendance mutuelle d'une famille d'événements : par définition une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est indépendante si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \dots, i_n$ éléments distincts de I , $P(\cap_{j=1}^n A_{i_j}) = \prod_{j=1}^n P(A_{i_j})$.

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi; si les événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i , avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Si la famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est indépendante, alors toute sous famille est indépendante. En particulier les événements sont indépendants deux à deux. Attention l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle de la famille.

3.3.2 Variables aléatoires et lois de variables aléatoires

On appelle variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}([-\infty, x]) \in \mathcal{A}.$$

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ obtenu en opérant par passages au complémentaire, par réunions, par intersections sur une famille finie ou dénombrable d'intervalles de la forme $] - \infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, et si X est une variable aléatoire réelle alors $(X \in A)$ appartient à $\mathcal{A}$. Donc $P(X \in A)$ a un sens.

Si $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est une famille finie de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et si $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue alors l'application composée $\omega \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega))$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(A)$ est l'image réciproque par X de A , c'est à dire l'ensemble des éléments ω de Ω qui vérifient $X(\omega) \in A$; on la note plus simplement $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$. Pour $A =] - \infty, x]$ cette image réciproque est l'ensemble des éléments ω de Ω qui vérifient $X(\omega) \leq x$; on la note plus simplement $(X \leq x)$ ou $\{X \leq x\}$.

La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ peut être introduite, mais aucun résultat concernant cette tribu n'est exigible.

C'est le cas, entre autres, pour tout partie A qui est un intervalle réel ou le complémentaire d'un intervalle réel : savoir utiliser les relations suivantes

$$\begin{aligned} (X \in]a, +\infty[) &= \overline{(X \in]-\infty, a])}, \\ (X \in [a, +\infty[) &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (X \in]a - 1/k, +\infty[), \\ (X \in]-\infty, a]) &= \overline{(X \in [a, +\infty[)}, \\ (X \in]a, b]) &= (X \in]-\infty, b]) \setminus (X \in]-\infty, a]), \\ (X \in [a, b]) &= (X \in]-\infty, b]) \setminus (X \in]-\infty, a[), \\ (X \in [a, b[) &= (X \in]-\infty, b[) \setminus (X \in]-\infty, a]), \\ (X \in]a, b[) &= (X \in]-\infty, b[) \setminus (X \in]-\infty, a]). \end{aligned}$$

Notation $f(X_1, \dots, X_k)$.

La preuve de ce résultat n'est pas au programme; on en déduit le fait que la somme, le produit, le minimum, le maximum, ... d'une famille finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Si X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une application monotone de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors l'application composée $f \circ X$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Notation $f(X)$.

Le résultat s'étend au cas où f est monotone par morceaux.

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui converge simplement vers X , une application de Ω vers $\mathbb{R}$. Alors X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La preuve utilise la définition de limite et les propriétés des tribus.

On appelle loi (relativement à P) de la variable aléatoire réelle X l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout intervalle réel J associe le nombre $P(X \in J)$.

$\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$. C'est un sous ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On appelle loi (relativement à P) d'une famille finie $(X_1, \dots, X_k)$ de variables aléatoires réelles l'application de $\mathcal{I}(\mathbb{R})^k$ vers $\mathbb{R}$ qui à tout produit cartésien $J_1 \times \dots \times J_k$ d'intervalles réels associe le nombre

On note $(X_1 \in J_1, \dots, X_k \in J_k)$ l'événement

$$\bigcap_{i=1}^k (X_i \in J_i).$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k (X_i \in J_i)\right).$$

Fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X : c'est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t).$$

Propriétés de F_X : c'est une fonction croissante, continue à droite en tout point, de limite 0 en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

La réciproque (au sens où toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant ces trois propriétés est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle) n'est pas au programme.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de F_X permet de calculer $P(X \in I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

On doit savoir

La continuité de la fonction F_X en t équivaut à $P(X = t) = 0$.

$$\begin{aligned} P(X \in]a, +\infty[) &= 1 - F_X(a), \\ P(X \in [a, +\infty[) &= 1 - \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in]-\infty, a]) &= \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in]a, b]) &= F_X(b) - F_X(a), \\ P(X \in [a, b]) &= F_X(b) - \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in [a, b[) &= \lim_{b^-} F_X - \lim_{a^-} F_X, \\ P(X \in]a, b[) &= \lim_{b^-} F_X - F_X(a), \\ P(X = a) &= F_X(a) - \lim_{a^-} F_X. \end{aligned}$$

On définit la fonction de répartition d'une famille finie $(X_1, \dots, X_k)$ de variables aléatoires réelles comme étant l'application de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}$, $(t_1, \dots, t_k) \mapsto P(X_1 \leq t_1, \dots, X_k \leq t_k)$. Les résultats précédents s'étendent au cas d'une famille finie $(X_1, \dots, X_k)$.

Deux familles de lois sont au programme : lois discrètes et lois à densité.

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi discrète (relativement à la probabilité P) s'il existe $\Omega' \in \mathcal{A}$ de probabilité 1 tel que $D = X(\Omega')$ soit au plus dénombrable.

On obtient

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x).$$

On dit que la loi de X est discrète usuelle s'il existe un intervalle J de $\mathbb{Z}$ et une bijection croissante

$$\varphi : J \rightarrow D, \quad k \mapsto x_k.$$

L'usage est, dans ce cas, de représenter la loi de X par un tableau de lignes comportant en première ligne les x_k , éléments de D , écrits en ordre croissant, en deuxième ligne les probabilités correspondantes $p_k = P(X = x_k)$.

Exemples premiers de lois discrètes.

Une variable aléatoire réelle X est dite de loi à densité (relativement à la probabilité P) si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous-ensemble fini F (éventuellement vide).

La densité est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus F$, d'intégrale convergente et valant 1 sur $\mathbb{R}$.

Pas de résultats théoriques au programme dans le cas de plusieurs variables.

On peut supprimer de D tous les éléments x tels que $P(X = x) = 0$; les x restants sont appelées valeurs possibles de la variable discrète X .

La loi de X est caractérisée par la donnée de D et de l'application $x \mapsto P(X = x)$, de D dans $\mathbb{R}$.

Des lignes supplémentaires peuvent donner les cumuls $\sum_{j \leq k} p_j$ ou les produits $x_k p_k$. Il est intéressant d'utiliser un tableur.

Rappeler les lois vues en première année.

Une telle variable aléatoire est dite aussi de loi continue. On appelle alors densité de X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(t) = F'_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus F$ et $f_X(t) = 0$ pour $t \in F$.

Pour tout intervalle I de borne inférieure $a \in \mathbb{R}$ et de borne supérieure $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

Exemples premiers de lois continues.

Loi uniforme sur un segment réel $[a, b]$, loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, loi gamma de paramètre (α, λ) , lois gaussiennes.

Loi d'une variable aléatoire obtenue par composition.

Il s'agit d'étudier la loi de $Y = g(X)$ où X est une variable aléatoire de loi connue et g une fonction de la variable réelle, ou plus généralement, celle de $Y = g(X_1, \dots, X_k)$.

Aucun résultat théorique général n'est au programme; les exercices porteront sur des cas simples.

Une famille $(X_j)_{j \in J}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante si, pour toute famille $(I_j)_{j \in J}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, la famille $((X_j \in I_j))_{j \in J}$ d'événements est indépendante.

On distinguera l'indépendance de la famille de variables (dite mutuelle parfois) et l'indépendance deux à deux des variables. On notera que l'indépendance d'une famille de variables est relative à une probabilité donnée.

Indépendance héritée (Lemme des coalitions) :

Si la famille $(X_j)_{1 \leq j \leq n_k}$ est indépendante et si $0 < n_1 < \dots < n_k$, alors la famille

$(f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k}))$ est indépendante.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de lois discrètes données.

Modélisation du jeu Pile-Face répété (ou infini).

Loi conditionnelle de X sachant un événement non négligeable A .

C'est $(P_A)_X$ la loi de X sous la probabilité P_A . On l'utilise notamment dans le cas où (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $A = (Y = t)$, t réel donné.

Loi de la somme de variables indépendantes.

Proposer de nombreux exemples de somme de variables indépendantes. Dans certains cas, on a une propriété de stabilité : la loi de la somme est du même type. Étudier notamment les cas de lois gaussiennes et de lois de Poisson.

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont discrètes d'ensembles de valeurs possibles respectifs D_1 et D_2 (sous ensembles de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables), alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est discrète.

Dans ce cas, l'ensemble des valeurs possibles de S est $D = \{u + v ; (u, v) \in D_1 \times D_2\}$ et la loi de S est donnée, pour tout $s \in D$, par :

$$\begin{aligned} P(S = s) &= \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u)P(X_2 = s - u) \\ &= \sum_{v \in D_2} P(X_1 = s - v)P(X_2 = v). \end{aligned}$$

Cette formule est appelée la convolution discrète des lois de X_1 et X_2 .

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes telles que X_1 soit discrète, d'ensemble de valeurs possibles D_1 , et X_2 soit continue, de densité f_2 , alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Dans ce cas, la densité de S est la fonction :

$$f : s \mapsto \sum_{u \in D_1} P(X_1 = u) f_2(s - u).$$

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont les lois sont continues, de densités respectives f_1 et f_2 , alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2$ est à densité.

Dans ce cas, la densité de S est la fonction

$$f : s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u) f_2(s - u) du.$$

Cette fonction est appelée le produit de convolution des densités f_1 et f_2 .

3.3.3 Espérance, moments

Il est recommandé de proposer ici de nombreux exercices sur des calculs d'espérances, de moments et de variances.

Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, ou continue, de densité f_X , on définit l'espérance de X par la formule

La sommabilité permet de donner une valeur finie qui ne dépend pas d'un ordre choisi des x_k ; l'intégrabilité pour une fonction est l'analogue de la sommabilité pour une famille.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & (\text{cas discret}) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt & (\text{cas continu}) \end{cases}$$

sous réserve de la sommabilité (resp. l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$) de la famille $(x_k p_k)_k$ (resp. de la fonction $t \mapsto t f_X(t)$).

Espérance de variables aléatoires réelles de lois usuelles.

Propriété de transfert à une variable :

Si X est une variable aléatoire réelle de loi discrète, caractérisée par $(x_k, p_k)_k$, alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x_k) p_k)_k$ est sommable.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

Si X est une variable aléatoire réelle continue, de densité f_X , alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la fonction $t \mapsto g(t)f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En cas d'intégrabilité, on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t) dt.$$

Les démonstrations de ces résultats ne sont pas exigibles dans le cas général. On pourra en revanche traiter des exemples de recherche de l'espérance de $Y = g(X)$; on évitera les exemples inutilement compliqués.

Propriété de transfert à deux variables (cas discret) :

Si (X_1, X_2) est un couple de variables aléatoires réelles de loi discrète (loi conjointe caractérisée par $((x_i, y_j), p_{i,j})_{i,j}$), alors la variable aléatoire $Y = g(X_1, X_2)$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x_i, y_j)p_{i,j})_{i,j}$ est sommable.

En cas de sommabilité, on a :

$$E(Y) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{i,j}.$$

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible dans le cas général. On traitera des exemples simples de recherche de l'espérance de $Y = g(X_1, X_2)$.

Le transfert à deux variables dans le cas continu (à densité) n'est pas au programme.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si Y admet une espérance et si $|X| \leq Y$ alors X admet une espérance.

Résultat admis qui relève en fait de l'intégration de Lebesgue.

Propriétés de l'espérance : Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Espérance d'un produit de variables aléatoires réelles indépendantes, sous réserve d'existence.

Les démonstrations de ces propriétés dans le cas général sont admises. Elles peuvent être présentées dans le cas discret.

Moments, variance, écart-type, covariance :

Le moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de X est, sous réserve d'existence, $E(X^k)$.

Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors elle admet un moment d'ordre j pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$; de même la variable aléatoire réelle $X + \alpha$ admet un moment d'ordre k , pour tout réel α .

Si la variable aléatoire réelle X admet un moment d'ordre 2, on appelle variance de X la quantité $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et écart-type de X la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Dans ce cas on a :

- $V(X) \geq 0$ et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$;
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque partout ;
- $V(X + \alpha) = V(X)$, pour tout réel α .

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, alors :

- la variable aléatoire XY admet une espérance et $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ (Cauchy-Schwarz) ;

- $S = X + Y$ admet un moment d'ordre 2 et sa variance $V(S)$ est donnée par la formule ci-contre.

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, on définit la covariance du couple (X, Y) par la formule

$$\begin{aligned} C(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 et si ces variables sont indépendantes, leur covariance est nulle.

Corrélation linéaire : Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2 de lois non certaines (i.e. variances non nulles), on définit le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) par la formule

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Si X admet un moment d'ordre 1, on appelle variable centrée associée à X la variable aléatoire réelle $\tilde{X} = X - E(X)$.

Si X admet un moment d'ordre 2, on appelle variable centrée réduite associée à X la variable aléatoire réelle $X^* = \frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$.

$$V(S) = V(X) + V(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Avec cette notation on obtient

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X, Y).$$

La variance de la somme est alors la somme des variances.

La réciproque est fautive : covariance nulle n'implique pas indépendance.

Le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est un élément de l'intervalle $[-1, 1]$.

Le cas $\rho = 1$ équivaut à $Y = \alpha X$ avec $\alpha > 0$, le cas $\rho = -1$ équivaut à $Y = \alpha X$ avec $\alpha < 0$.

L'indépendance de X et Y implique $\rho = 0$, la réciproque est fautive.

3.3.4 Fonctions génératrices

Fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$$

La série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et $G_X(1) = 1$; cette série converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

La loi de X est caractérisée par G_X (pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Lien entre fonction génératrice et moments : la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, auquel cas $E(X) = G'_X(1)$; la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X admet une dérivée seconde en 1, auquel cas $E(X^2) - E(X) = G''_X(1)$.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pourra présenter la notion de transformée de Laplace-Fourier dans le cas d'une loi à densité mais aucun résultat n'est au programme concernant ces transformations.

Les élèves doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$. Les élèves doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

Expression de la fonction génératrice de la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ quand les X_i sont indépendantes.

3.3.5 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Inégalité de Markov : Si X est une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance, alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

Cette inégalité permet de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors, pour tout $\beta > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \beta) \leq \frac{V(X)}{\beta^2}.$$

Interprétation : la variance permet de contrôler l'écart entre X et sa valeur moyenne $E(X)$.

Inégalité de Jensen : Si X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application convexe sur $\mathbb{R}$ et si $Y = f(X)$ admet une espérance, alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X)).$$

Démonstration uniquement dans le cas où la loi de X est discrète.

Définition de la convergence en probabilité d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle Y :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y - X_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Si la suite de fonctions $(f_k)_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g , la suite de variables aléatoires réelles $(f_k(X))_k$ converge en probabilité vers $g(X)$.

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers une variable aléatoire réelle Y :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_Y, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_Y(t),$$

où D_Y désigne l'ensemble des points de discontinuité de la fonction F_Y .

Si les variables aléatoires X_n ainsi que Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, la convergence en loi de la suite $(X_n)_n$ vers Y équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

En fait la limite d'une convergence en loi est la loi de Y .

Exemple à connaître : soit $\lambda > 0$ et soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que la suite $(np_n)_{n \geq 1}$ converge vers λ ; si, pour tout $n \geq 1$, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre (n, p_n) alors la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. La réciproque est fausse.

Loi faible des grands Nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors

la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)_{n \geq 1}$, de variables aléatoires,

converge en probabilité vers la variable constante $\mu = E(X_1)$.

Théorème de la limite centrée : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2, alors la

suite $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu\right)\right)_{n \geq 1}$, où $\mu = E(X_1)$ et

$\sigma = \sigma(X_1)$, converge en loi vers la variable aléatoire suivant la loi gaussienne standard.

Résultat admis.

Application : interprétation fréquentiste de $P(A)$.

la vitesse de convergence de la loi des grands nombre est donc en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ce théorème admet de nombreuses applications, notamment en statistiques ; elles ne sont pas au programme.

3.4 Équations différentielles linéaires

Cette section consacrée aux équations différentielles linéaires est organisée autour des axes suivants :

- introduire quelques notions de base sur les équations différentielles linéaires et familiariser les élèves avec ces notions en mettant en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples ;
- étudier les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à valeurs vectorielles, et leurs traductions en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ;
- étudier le cas particulier des systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec l'exponentielle d'endomorphismes et de matrices ;

- étudier les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 et 2.

La pratique de la résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application sur ce point. On pourra en revanche présenter aux élèves divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice et son influence sur le comportement des solutions ; on pourra également, en dimension 2, représenter les courbes intégrales.

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- aient traité des exemples de recherche et d'étude de courbes intégrales d'un champ linéaire de vecteurs dans le plan ;
- maîtrisent la pratique de la résolution d'une équation différentielle du type $X' = AX$, où A est une matrice à coefficients réels ou complexes, par réduction de A à une forme diagonale (ou triangulaire en dimension ≤ 3), et connaissent l'expression intégrale des solutions de l'équation $X' = AX + B(t)$;
- aient pratiqué, sur des exemples, l'étude d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 et notamment la recherche de solutions développables en série entière ainsi que les problèmes de raccordements de solutions.

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace normé de dimension finie.

3.4.1 Généralités sur les équations différentielles linéaires

Équation différentielle linéaire :

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t),$$

où a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F .

Solution d'une équation différentielle linéaire, solution globale.

Problème de Cauchy.

Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n .

Représentation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n par un système différentiel linéaire.

Forme matricielle : système différentiel linéaire

$$X' = AX + B(t).$$

Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

Principe de superposition.

Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

Solution d'une telle équation, problème de Cauchy associé.

3.4.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution globale d'un problème de Cauchy, unicité locale des solutions.

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation aux systèmes différentiels linéaires.

Adaptation aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n .

Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions globales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, F)$. Pour t_0 dans I , l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur F .

Dimension de l'espace des solutions globales. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n .

Structure de l'ensemble des solutions globales d'une équation différentielle linéaire avec second membre.

Exemples d'équations scalaires d'ordre 1 (resp. 2) non résolues (ou non normalisées) en y' (resp. y'') :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),$$

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) = d(t).$$

Les élèves doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

Exemples d'étude de problèmes de raccordements de solutions.

3.4.3 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants : $x'(t) = a(x(t))$, $a \in \mathcal{L}(F)$.

Si x_0 est un élément de F et $a \in \mathcal{L}(F)$, résolution du problème de Cauchy

$$x'(t) = a(x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Traduction matricielle $X' = AX$.

La solution globale est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t \mapsto \exp((t - t_0)a)(x_0) = e^{(t-t_0)a}(x_0).$$

Traduction matricielle.

Exemples de calculs explicites de solutions.

On se limite aux deux cas : a diagonalisable ou $\dim F \leq 3$.

3.4.4 Méthode de variation des constantes

Méthode de variation des constantes : définition d'un système fondamental de solutions de l'équation $x'(t) = a(t)(x(t))$, caractérisation d'un tel système; application à la résolution de l'équation différentielle $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ par la méthode de variation des constantes.

Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.

Définition d'un système fondamental de solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2 et résolue. Wronskien d'un couple de solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2; caractérisation des bases de l'espace des solutions.

Dans les exercices pratiques, on se limite au cas de la dimension 2.

Expression intégrale des solutions d'un tel système.

Expression des solutions de l'équation homogène dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I .

Cas d'une équation du type $x'' + q(t)x = 0$.

Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre. Expression intégrale des solutions de l'équation complète.

3.5 Calcul différentiel et optimisation

L'objectif de cette section est de généraliser et d'approfondir les notions de base du calcul différentiel d'une variable et celles sur les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, déjà vues en première année. Elle est organisée autour des axes suivants :

- *présenter les notions fondamentales de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimensions finies sur $\mathbb{R}$;*
- *donner une introduction à la thématique de l'optimisation (extremas libre et lié), en lien avec le théorème des bornes atteintes du cours de topologie.*

Seront étudiées dans cette section les notions de différentielle en un point, de dérivée selon un vecteur et de dérivées partielles, les notions d'applications continûment différentiables, de gradient, de points critiques et de dérivées partielles d'ordre supérieur. Ces notions se prêtent à des représentations issues de différents cadres ou registres ; on tâchera de souligner cet aspect en faisant intervenir à la fois les aspects intrinsèques et calculatoires, et en ayant régulièrement recours à des figures et à des croquis.

Lors de cette étude, la différentielle en un point d'une application est introduite à l'aide d'un développement limité ; on tâchera de mettre en valeur les faits suivants :

- *de nombreuses questions de calcul différentiel s'étudient en se ramenant, via une paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle ; par exemple, en paramétrant le segment $[a, a + h]$ par l'application $t \mapsto a + th$, on obtient $f(a + h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi_h(t) = f(a + th)$;*
- *les dérivées partielles fournissent un outil pratique de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base ;*
- *le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.*

Il est attendu qu'à l'issue de cette section, les élèves

- *sachent vérifier si une fonction est différentiable, de classe $\mathcal{C}^k$, ($k \in \mathbb{N}^*$), et en calculer les dérivées partielles ;*
- *soient en mesure de déterminer les points critiques d'une fonction différentiable, si elle en admet, et en rechercher les extremums locaux ou globaux ;*
- *soient capables d'appliquer les résultats du calcul différentiel notamment pour déterminer les vecteurs tangents au graphe d'une fonction de deux variables ou à une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$, et préciser le plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$;*
- *soient initiés à la résolution d'équations aux dérivées partielles à travers l'étude d'exemples simples ;*
- *soient capables d'exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations, ...).*

Les applications considérées dans cette section sont définies sur un ouvert U de E à valeurs dans F , où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

3.5.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, différentielle

Dérivée de f au point a selon le vecteur non nul v .

Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.

Dérivées partielles de f dans une base de E .

Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\partial_i f(a)$.

Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.

Application différentiable au point a .

Développement limité à l'ordre 1 ; notation $o(h)$.

Lorsque $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si, et seulement si, toutes les f_i le sont.

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur non nul.

Différentielle de f en a , appelée aussi application linéaire tangente à f en a . Unicité de la différentielle de f en a et relation

Notations $df(a)$, $df(a).v$.

$$df(a)(v) = D_v f(a).$$

Application différentiable sur un ouvert U .
Différentielle sur U .

Notations df .

Cas particuliers : restriction à un ouvert d'une application constante, d'une application linéaire.

Lien entre différentielle et dérivées partielles.

La matrice jacobienne en a d'une application f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, est la matrice de $df(a)$ dans les bases canoniques.

Cas des fonctions d'une variable : si U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un élément de U , la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a)(1)$.

Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a . Expression du gradient dans une base orthonormée.

Notation $\nabla f(a)$.

Expression de la dérivée de f au point a selon un vecteur non nul v à l'aide de son gradient en a :

Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale ($\nabla f(a)$ pointe la direction selon laquelle la variation de f est maximale, dite direction de la plus grande pente de f).

$$D_v f(a) = df(a).v = (\nabla f(a)|v).$$

3.5.2 Opérations sur les applications différentiables

Différentiabilité et différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables.

$$d(\lambda.f + g)(a) = \lambda.df(a) + dg(a).$$

Différentiabilité et différentielle de l'application $M(f_1, \dots, f_p) : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$, où M est une application multilinéaire et $f_1, \dots, f_p$ des applications différentiables.

Expression de la différentielle en un point dans le cas particulier $p = 2$. On utilisera l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout couple (u, v) , on ait $\|M(u, v)\| \leq C\|u\| \|v\|$.

Règle de la chaîne (chain rule) : différentiabilité et différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc γ : si $\gamma : I \rightarrow E$ est dérivable en t et f différentiable en $\gamma(t)$, alors l'application $f \circ \gamma : I \rightarrow F$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$.

Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Si $x_1, \dots, x_m$ sont différentiables, calcul des dérivées partielles de l'application :

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m)).$$

3.5.3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

Une application f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E si elle est différentiable sur U et si l'application $df : a \mapsto df(a)$ est continue sur U .

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, ses dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de U et sont continues sur U .

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans F et γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeur dans U , alors en posant $a = \gamma(\alpha)$ et $b = \gamma(\beta)$, avec $(\alpha, \beta) \in I^2$, on obtient

$$f(b) - f(a) = \int_{\alpha}^{\beta} df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Démonstration non exigible.

Application au calcul de la circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

Si U est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur U .

Démonstration exigible pour U convexe.

3.5.4 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

Vecteur tangent à une partie : si $\mathcal{A}$ est une partie de E et a un point de $\mathcal{A}$, un vecteur v de E est dit tangent à $\mathcal{A}$ en a s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$, dérivable en 0 et à valeurs dans $\mathcal{A}$, tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Ensemble $T_a\mathcal{A}$ des vecteurs tangents à $\mathcal{A}$ en a .
Exemples : sous-espace affine, sphère d'un espace euclidien.

Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où $\mathcal{A}$ est le graphe d'une fonction réelle φ différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$:

Plan affine tangent en un point à une surface d'équation $z = \varphi(x, y)$: équation cartésienne.

$$\mathcal{A} = \{(x, y, \varphi(x, y)) ; (x, y) \in \Omega\}.$$

Si f est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de E et $\mathcal{A}$ une ligne de niveau de f , alors les vecteurs tangents à $\mathcal{A}$ en un point a tel que $df(a) \neq 0$ sont les éléments du noyau de $df(a)$: $T_a\mathcal{A} = \text{Ker } df(a)$.

Si E est de plus euclidien, alors les vecteurs tangents à $\mathcal{A}$ en a sont les vecteurs orthogonaux au gradient de f en a : $v \in T_a\mathcal{A} \iff (\nabla f(a)|v) = 0$.
Application dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ pour une surface d'équation $f(x, y, z) = c$: plan tangent à ladite surface.

La démonstration de ce résultat et le théorème des fonctions implicites sont hors programme.

Si $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in U ; f(x) = c\}$ est appelé la ligne de niveau de f définie par l'équation $f(x) = c$; en dimension 3, on parle de surface de niveau c et en dimension 2 de ligne (ou de courbe) de niveau c .

3.5.5 Optimisation : étude au premier ordre

Point critique d'une application différentiable.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.

Exemples de recherche d'extremums globaux.

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert U , si $\mathcal{A}$ est une partie de U et si la restriction de f à $\mathcal{A}$ admet un extremum local en un point $a \in \mathcal{A}$ en lequel f est différentiable, alors $df(a)$ s'annule en tout vecteur tangent à $\mathcal{A}$ en a .

Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U de E et si la restriction de f à $\mathcal{A} = \{x \in U ; g(x) = 0\}$ admet un extremum local en un point $a \in \mathcal{A}$ tel que $dg(a) \neq 0$, alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$.

Si E est euclidien, traduction en termes de gradient.

Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

3.5.6 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: une application est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U .

Notations $\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}, \partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f, \partial_{j_1, \dots, j_k} f$.

La notion de différentielle seconde est hors programme.

Théorème de Schwarz.

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstrations non exigibles.

Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

Pour l'étude d'équations aux dérivées partielles, les élèves doivent savoir exploiter les techniques de changements de variables : transformations affines, passage en coordonnées polaires.

3.5.7 Optimisation : étude au second ordre

Matrice hessienne en un point a d'une fonction f réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Notation $H_f(a)$; la matrice hessienne est symétrique réelle d'ordre n .

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2, au voisinage d'un point a , pour une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$:

La démonstration n'est pas exigible.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(H_f(a).h|h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2), \\ &= f(a) + {}^t \nabla f(a)h + \frac{1}{2} {}^t h H_f(a) h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Si f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en a , alors a est point critique de f et $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Adaptation au cas d'un maximum local.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si a est point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a .

Adaptation au cas d'un maximum local.

Explicitation pour $n = 2$ à l'aide de la trace et du déterminant.

Avec les notations de Monge, si $\text{rg}(H_f(a)) = 2$, on obtient un extremum local si $rt - s^2 > 0$ et un point-col (ou point-selle) si $rt - s^2 < 0$.

Table des matières

1	Préambule	1
1.1	Objectifs généraux de formation	1
1.2	Organisation du texte du programme	3
1.3	Contenu du programme	3
1.4	Organisation temporelle de la formation	5
1.5	Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression	5
2	Première période	7
2.1	Structures algébriques usuelles	7
2.1.1	Compléments sur les groupes	7
2.1.2	Compléments sur les anneaux	7
2.1.3	Idéaux de $\mathbb{Z}$	7
2.1.4	Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	8
2.1.5	Anneaux de polynômes à une indéterminée	8
2.1.6	Structure d'algèbre	8
2.2	Topologie des espaces normés	8
2.2.1	Normes et espaces vectoriels normés	9
2.2.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	10
2.2.3	Comparaison des normes	10
2.2.4	Topologie d'un espace vectoriel normé	10
2.2.5	Étude locale d'une application, continuité	11
2.2.6	Applications linéaires et multilinéaires continues	12
2.2.7	Parties compactes d'un espace vectoriel normé	12
2.2.8	Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	13
2.2.9	Espaces vectoriels normés de dimension finie	13
2.3	Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	13
2.3.1	Compléments d'algèbre linéaire	14
2.3.2	Sous-espaces stables ; éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	15
2.3.3	Polynôme caractéristique	15
2.3.4	Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	16
2.3.5	Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	16
2.3.6	Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	17
2.3.7	Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	17

2.3.8	Lemme de décomposition des noyaux	17
2.3.9	Application à la réduction de la notion de polynôme annulateur	18
2.3.10	Théorème de Cayley-Hamilton et sous-espaces caractéristiques	18
2.4	Séries dans un espace normé de dimension finie ; familles sommables	18
2.4.1	Révisions sur les séries numériques	19
2.4.2	Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	19
2.4.3	Familles sommables de nombres complexes	20
2.5	Fonctions vectorielles d'une variable réelle	24
2.5.1	Dérivation	24
2.5.2	Intégration sur un segment	25
2.6	Suites et séries de fonctions	26
2.6.1	Modes de convergence d'une suites ou d'une séries de fonctions	27
2.6.2	Stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite	27
2.6.3	Approximation uniforme	29
2.7	Séries entières	29
2.7.1	Rayon de convergence d'une série entière	29
2.7.2	Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	30
2.7.3	Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	30
2.7.4	Développement d'une fonction en série entière, développements usuels	31
3	Seconde période	32
3.1	Endomorphismes d'un espace euclidien	32
3.1.1	Rappels et compléments sur les espaces préhilbertiens réels	32
3.1.2	Formes linéaires d'un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme	33
3.1.3	Matrices orthogonales	33
3.1.4	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	33
3.1.5	Isométries vectorielles en dimension 2	34
3.1.6	Réduction des isométries vectorielles	34
3.1.7	Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	35
3.1.8	Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	35
3.2	Intégrales dépendant d'un paramètre	35
3.2.1	Passage à la limite sous l'intégrale	36
3.2.2	Régularité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre	37
3.2.3	Exemples d'applications	38
3.3	Probabilités	38

3.3.1	Espaces probabilisés	39
3.3.2	Variables aléatoires et lois de variables aléatoires	41
3.3.3	Espérance, moments	45
3.3.4	Fonctions génératrices	47
3.3.5	Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites	48
3.4	Équations différentielles linéaires	49
3.4.1	Généralités sur les équations différentielles linéaires	50
3.4.2	Solutions d'une équation différentielle linéaire	50
3.4.3	Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	51
3.4.4	Méthode de variation des constantes	51
3.5	Calcul différentiel et optimisation	52
3.5.1	Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, différentielle	53
3.5.2	Opérations sur les applications différentiables	53
3.5.3	Applications de classe $\mathcal{C}^1$	54
3.5.4	Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	54
3.5.5	Optimisation : étude au premier ordre	55
3.5.6	Applications de classe $\mathcal{C}^k$	55
3.5.7	Optimisation : étude au second ordre	56