

Devoir libre N°2 (correction)

à rendre le samedi 11/10/2025.

Partie I : Étude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On a

$$|(AB)_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

$$\text{donc } \|AB\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |(AB)_{i,j}| \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty.$$

2. a. On écrit $X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{i,j} E_{i,j}$ et on a

$$N(X) = N\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_{i,j} E_{i,j}\right) \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |x_{i,j}| N(E_{i,j}) \leq \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} N(E_{i,j})\right) \|X\|_\infty.$$

b. i. Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On a $N(X) = N(X - Y + Y) \leq N(X - Y) + N(Y)$ donc

$$N(X) - N(Y) \leq N(X - Y)$$

et de même, $N(Y) - N(X) \leq N(X - Y)$ donc $|N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y)$. Ainsi, la norme N est 1-lipschitzienne donc continue.

ii. La sphère unité S_∞ est fermée bornée donc compact car l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Par ailleurs, la fonction norme N est continue sur S_∞ donc par le théorème des bornes atteintes, N est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $X \in S_\infty$, $N(X_0) \leq N(X)$.

iii. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nul. On a $\frac{X}{\|X\|_\infty} \in S_\infty$ donc par la question précédente,

$$N(X_0) \leq N\left(\frac{X}{\|X\|_\infty}\right) = \frac{N(X)}{\|X\|_\infty}$$

et par suite, $N(X_0)\|X\|_\infty \leq N(X)$. Ainsi, il existe $\alpha = N(X_0) > 0$ ($\alpha > 0$ car X_0 est non nul puisque $X_0 \in S_\infty$) tel que $\alpha\|X\|_\infty \leq N(X)$. De plus, l'inégalité en question est triviale pour $X = O_n$. D'où, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\alpha\|X\|_\infty \leq N(X)$.

c. D'après ce qui précède, il existe $\alpha, \beta > 0$ (avec $\beta = \sum_{1 \leq i, j \leq n} N(E_{i,j})$) tels que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\alpha\|X\|_\infty \leq N(X) \leq \beta\|X\|_\infty$$

donc les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes. Par transitivité, toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

3. a. D'après ce qui précède, il existe $\beta > 0$ tel que $N(AB) \leq \beta\|AB\|_\infty \leq n\beta\|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

b. D'après ce qui précède, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $N(AB) \leq n\beta\|A\|_\infty \|B\|_\infty \leq n\frac{\beta}{\alpha^2} N(A)N(B)$.

4. a. i. L'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto AX$ est linéaire donc continue car l'espace de départ $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est de dimension finie donc il existe $c \geq 0$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq cN(X)$ c-à-d que l'ensemble $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$ qui est, une partie non vide de $\mathbb{R}$, est majorée donc admet une borne supérieure. Ainsi, $\|A\|$ existe.

ii. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\} \subset \left\{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\right\}$ car si, $y = \frac{N(AX)}{N(X)}$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, alors $y = N\left(A \cdot \frac{X}{N(X)}\right) = N(AY)$ avec $N(Y) = 1$. Donc

$$\|A\| = \sup \left\{\frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\} \leq \sup \left\{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\right\}.$$

Pour l'inégalité inverse, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $N(X) = 1$, on a

$$N(AX) = \frac{N(AX)}{N(X)} \leq \sup \left\{ \frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\} = \|A\|$$

donc $\sup \{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} \leq \|A\|$. D'où l'égalité

$$\|A\| = \sup \{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\}.$$

iii. • Séparation : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\implies \sup \{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} = 0 \\ &\implies \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(AX) = 0 \\ &\implies \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = O_{n,1} \\ &\implies A = O_n. \end{aligned}$$

• Homogénéité : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda.A\| &= \sup \{N(\lambda.AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} \\ &= \sup \{|\lambda|N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} \\ &= |\lambda| \sup \{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} \\ &= |\lambda| \|A\|. \end{aligned}$$

• Inégalité triangulaire : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $N(X) = 1$:

$$\begin{aligned} N((A+B)X) &= N(AX + BX) \\ &\leq N(AX) + N(BX) \\ &\leq \sup \{N(AX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} + \sup \{N(BX), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|A+B\| = \sup \{N((A+B)X), X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), N(X) = 1\} \leq \|A\| + \|B\|.$$

D'où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. On a

$$\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \sup \left\{ \frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\} = \|A\|$$

donc $N(AX) \leq \|A\|N(X)$. Si X est nul, l'inégalité est triviale, d'où

$$N(AX) \leq \|A\|N(X) \text{ pour tout } X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

c. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. On a

$$N(ABX) \leq \|A\|N(BX) \leq \|A\| \|B\|N(X)$$

donc $\frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \|A\| \|B\|$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$. Par suite,

$$\|AB\| = \sup \left\{ \frac{N(ABX)}{N(X)}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \right\} \leq \|A\| \|B\|.$$

Partie II : Suites de matrices.

5. Sur l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, toutes les normes sont équivalentes, on choisit la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}
 A_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} A &\iff \|A_m - A\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\
 &\iff \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\
 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, |a_{i,j}^{(m)} - a_{i,j}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \\
 &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j}^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} a_{i,j}.
 \end{aligned}$$

6. a. Posons $\rho_m = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}}$. On a

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix} = \rho_m \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_m} & -\frac{\alpha/m}{\rho_m} \\ \frac{\rho_m}{\alpha/m} & \frac{\rho_m}{\rho_m} \end{pmatrix} = \rho_m \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \tan \theta_m = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} = \frac{\alpha/m}{\rho_m} \times \frac{\rho_m}{1} = \frac{\alpha}{m} \text{ donc } \theta_m = \arctan\left(\frac{\alpha}{m}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

b. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$A_m^m = \rho_m^m \begin{pmatrix} \cos \theta_m & -\sin \theta_m \\ \sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}^m = \rho_m^m \begin{pmatrix} \cos m\theta_m & -\sin m\theta_m \\ \sin m\theta_m & \cos m\theta_m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Par ailleurs, } \rho_m^m &= \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^{m/2} = \exp\left(\underbrace{\frac{m}{2} \ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)}_{\sim \alpha^2/m^2}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1 \text{ et} \\
 m\theta_m &= \underbrace{m \arctan\left(\frac{\alpha}{m}\right)}_{\sim \alpha/m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha.
 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } A_m^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

D'après : CNC 2017 MP (extrait).