Devoir libre N°3

à rendre le mercredi 05/11/2025.

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I : Étude de quelques exemples.

1. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

2. On donne deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que A et B ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

b. Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

c. Ont-elles le même polynôme minimal ?

3. On donne deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

i. **Première méthode :** en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E.

ii. **Deuxième méthode :** en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

4. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice : $U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

5. **Application.** soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable. **Indication.** on pourra calculer U^2.

6. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^{*2}$ différents et non opposés.

a. Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.

b. Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A.

c. Préciser une base de vecteurs propres de A.
Dans cette question, il est [vivement] déconseillé de calculer le polynôme caractériqtique de A.

7. Démontrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II : Démonstration d'un résultat.

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

a. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

b. Justifier que la fonction $x \longmapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynômiale non identiquement nulle sur $\mathbb{C}$ et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q = R + xS$ soit inversible.

c. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. **Application.** démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III.

On s'intéresse dans cette partie à la proposition $\mathcal{P}_n$:

« Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

10. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le polynôme minimal, démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle est vraie également pour $n = 3$.

11. Démontrer que la proposition $\mathcal{P}_n$ est fausse pour $n = 4$. **Indication.** on pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.

D'après : CCINP 2019 MP (extrait).