

Devoir maison N°2 (correction)

Équivalence des normes en dimension finie.

1. Soit $x \in E$. On écrit x dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$. On a

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^p x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_\infty \underbrace{\sum_{i=1}^p \|e_i\|}_{\beta > 0} = \beta \|x\|_\infty.$$

Donc il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$.

Il reste à montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|$ $(\star)$.

Partie I : Première méthode.

2. Soit $(x, y) \in E^2$. On a

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ et, de même, on obtient $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Par suite, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ c-à-d la fonction norme $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

3. On pose $S_\infty = \{x \in E, \|x\|_\infty = 1\}$.

4. a. La fonction norme $\|\cdot\|$ est continue et S_∞ est un compact car S_∞ est fermé et borné et l'espace E est de dimension finie, donc par le théorème des bornes atteintes, la fonction norme $\|\cdot\|$ est bornée et atteint ses bornes. Par suite, il existe $x_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $x \in S_\infty$, $\inf_{x \in S_\infty} \|x\| = \|x_0\| \leq \|x\|$.

- b. Soit $x \in E$ non nul. le vecteur $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty$ donc $\|x_0\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|$ et par suite, $\|x_0\| \|x\|_\infty \leq \|x\|$.

Si $x = 0$, l'inégalité en question est triviale.

D'où il existe $\alpha = \|x_0\| > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|$.

5. D'après ce qui précède, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$ c-à-d les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

Par transitivité, on peut conclure que toutes les normes sur E sont équivalentes.

Partie II : Deuxième méthode.

6. Supposons $(\star)$ n'est pas vraie donc $\forall \alpha > 0, \exists x \in E, \alpha \|x\|_\infty > \|x\|$.

Pour $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que

$$\frac{1}{n} \|x_n\|_\infty > \|x_n\|$$

Posons alors $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}$ de sorte que $\|y_n\| < \frac{1}{n}$. On a alors $(y_n)_n \in S_\infty$ et $\|y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

7. La suite $(y_n)_n$ est bornée car $(y_n)_n \in S_\infty$ et l'espace E est de dimension finie, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(y_n)_n$ possède au moins une valeur d'adhérence $y \in S_\infty$.

8. Par la question précédente, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Par continuité de la norme, $\|y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|y\|$ et, par la question 6, $\|y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par unicité de la limite, $\|y\| = 0$ et donc $y = 0$ ce qui est absurde car $y \in S_\infty$.

D'où, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|$ et par suite,

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$$

c-à-d les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

Par transitivité, on peut conclure que toutes les normes sur E sont équivalentes.