Devoir maison N°2

Équivalence des normes en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\|.\|$ une norme sur E. On considère la norme $\|.\|_\infty$ définie sur E par : $\forall x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

L'objectif est de montrer, par deux méthodes, que toutes les normes sur E sont équivalentes.

1. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x \in E, \quad \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$.

Il reste à montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E, \quad \alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \qquad (\star)$.

Partie I : Première méthode.

2. Montrer que $\|.\|$ est une fonction continue de $(E, \|.\|)$ vers $\mathbb{K}$.

3. On pose $S_\infty = \{x \in E, \quad \|x\|_\infty = 1\}$.

4. **a.** Montrer qu'il existe $x_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $x \in S_\infty, \quad \|x_0\| \leq \|x\|$.

b. En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E, \quad \alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|$.

5. Conclure.

Partie II : Deuxième méthode.

Ici, on va raisonner par l'absurde en supposant que $(\star)$ n'est pas vraie.

6. Montrer l'existance d'une suite $(y_n)_n$ d'éléments de S_∞ telle que $\|y_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

7. Justifier que la suite $(y_n)_n$ possède une valeur d'adhérence $y \in S_\infty$.

8. Aboutir à une contradiction puis conclure.