Devoir maison N°3

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On pose alors $\alpha_n = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

> Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \dots, M_r$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que
>
> - Les matrices commutent deux à deux : $\forall (i,j) \in [\![1,r]\!],\ \ M_iM_j = M_jM_i$.
> - $r > \alpha_n$.
>
> Alors la famille $M_1, \dots, M_r$ est liée.

Ce résultat est un théorème de Issai Schur $(1875 - 1941)$ *démontré en* 1905. *La preuve élémentaire ci-dessus est due à Maryam Mirzakhani* $(1977 - 2017)$ *qui est, à ce jour, la seule femme à avoir reçu la médaille Fields.*

Partie I : Préliminaire.

Soit $M_1, \dots, M_r$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux.

1. Montrer que si A et B sont deux matrices appartenant à $\operatorname{Vect}(M_1, \dots, M_r)$ alors A et B commutent.

2. Soit Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $(M_1, \dots, M_r)$ est une famille libre et on pose pour tout $i \in [\![1,r]\!],\ \ A_i = Q^{-1}M_iQ$.

Montrer que la famille $(A_1, \dots, A_r)$ est libre et que pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2,\ \ A_iA_j = A_jA_i$.

Partie II : Cotrigonalisation.

Soit M_1 et M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M_1M_2 = M_2M_1$.

3. **a.** Justifier que M_1 a au moins une valeur propre notée λ_1.

b. Montrer que l'espace propre $E_{\lambda_1}(M_1) = \ker(\lambda_1 I_n - M_1)$ est stable par M_2, c'est-à-dire que pour tout $X \in E_{\lambda_1}(M_1),\ \ M_2X \in E_{\lambda_1}(M_1)$.

c. En déduire qu'il existe un vecteur colonne X non nul qui soit un vecteur propre de M_1 et de M_2.

d. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}M_1P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P^{-1}M_2P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right).$$

où $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ et que A_1 et A_2 commutent.

4. En utilisant une récurrence sur n, montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}M_1Q$ et $Q^{-1}M_2Q$ sont triangulaires supérieures.

On admet dans la suite du problème que le résultat ci-dessous se généralise à une famille de r matrices commutant deux à deux.

Partie III : Cas $n = 2$.

Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$. On a alors $\alpha_2 = 2$.

5. Exhiber deux matrices M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que (M_1, M_2) soit libre et que $M_1M_2 = M_2M_1$.

6. **a.** Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ constitué des matrices triangulaires supérieures.

b. Exhiber deux matrices triangulaires supérieuress de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui ne commutent pas.

c. En déduire que le théorème est vrai pour $n = 2$. **Indication :** on pourra utiliser le résultat admis dans la partie II.

Partie IV : Cas général.

On démontre le théorème par récurrence. Soit n un entier au moins égal à 3. On suppose que le théorème est vrai au rang $n-1$. On considère alors une famille $M_1, \ldots, M_r$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéairement indépendantes qui commutent deux à deux où $r > \alpha_n$ (on raisonne par l'absurde). En utilisant le résultat prouvé à la partie II, on sait qu'il existe une matrice inversible Q telle que pour tout i compris entre 1 et r, $A_i = Q^{-1}M_iQ$ est triangulaire supérieure. On notera de plus W l'espace vectoriel engendré par les matrices $A_1, \ldots, A_r$.

7. On pose pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} a_i & L_i \\ \hline 0 & \\ \vdots & N_i \\ 0 & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On notera $k = \mathrm{rg}\,(N_1, \ldots, N_r)$.

a. Justifier que $k \leq \alpha_{n-1}$.

Quitte à permuter les matrices, on peut supposer que $\mathrm{Vect}\,(N_1, \ldots, N_r) = \mathrm{Vect}\,(N_1, \ldots, N_k)$.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, il existe des complexes $\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,k}$ tels que $N_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \beta_{i,j} N_j$.

c. On pose alors pour $i \in [\![k+1, r]\!]$, $B_i = A_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \beta_{i,j} A_j$. Justifier que les matrices B_i appartiennent à W et qu'il existe des vecteurs lignes $X_i \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ linéairement indépendants tels que

$$\forall i \in [\![k+1, r]\!], \quad B_i = \left(\begin{array}{c} X_i \\ \hline \mathrm{O}_{n-1,n} \end{array}\right)$$

où, si p, q sont deux entiers naturels non nuls, $\mathrm{O}_{p,q}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

8. Justifier qu'il existe aussi un entier $\ell \leq \alpha_{n-1}$ et des vecteurs colonnes $Y_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ pour $j \in [\![\ell+1, r]\!]$ linéairement indépendants tels que les matrices $C_j = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_{n-1,n} & Y_j \end{array}\right)$ appartiennent à W.

9. Montrer que pour $i \in [\![k+1, r]\!]$ et $j \in [\![\ell+1, r]\!]$, $X_i Y_j = 0$. **Indication :** on pourra utiliser la question 1.

10. On considère alors

$$T = \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ X_{k+2} \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \quad \text{avec} \quad p = r - k.$$

a. Justifier que $\mathrm{rg}\,(T) \geq r - k$. Montrer que pour tout $j \in [\![\ell+1, r]\!]$, $TY_j = 0$.

b. En utilisant le théorème du rang, en déduire que

$$n \geq 2r - k - \ell > 2\alpha_n - 2\alpha_{n-1}.$$

c. Montrer que cette inégalité est fausse. **Indication :** on pourra séparer les cas n pair et n impair.

11. Conclure.