Devoir surveillé N°1 (correction)

Problème 1

Partie I : Questions préliminaires.

Q1. Soit G un groupe et $a \in G$ d'ordre fini m.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $d = m \wedge k$. Il existe $m', k' \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = m'd$, $k = k'd$ et $m' \wedge k' = 1$.
   Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a
   $$\left(a^k\right)^\ell = e \iff a^{k\ell} = e \iff m \mid k\ell \iff m' \mid k'\ell \overset{\text{Gauss}}{\iff} m' \mid \ell.$$
   Donc a^k est d'ordre $m' = \dfrac{m}{d} = \dfrac{m}{m \wedge k}$.
2. Dans le groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, on a $\overline{k} = k.\overline{1}$ et $\overline{1}$ est d'ordre n donc d'après la question précédente, $\overline{k}$ est d'ordre $\dfrac{n}{n \wedge k}$.

Q2. Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}
(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\iff \exists (\overline{k}, \overline{\ell}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ (\overline{x}, \overline{y}).(\overline{k}, \overline{\ell}) = (\overline{1}, \overline{1}) \\
&\iff \exists (\overline{k}, \overline{\ell}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ (\overline{x}\overline{k}, \overline{y}\overline{\ell}) = (\overline{1}, \overline{1}) \\
&\iff \exists (\overline{k}, \overline{\ell}) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{x}\overline{k} = \overline{1} \text{ et } \overline{y}\overline{\ell} = \overline{1} \\
&\iff (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Partie II : Arithmétiques dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Q3. Soit n un entier ≥ 2.

1. On a
   $$\begin{aligned}
   \overline{k} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\iff \exists \overline{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{k}\overline{u} = \overline{1} \\
   &\iff \exists \overline{u} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ \overline{ku - 1} = \overline{0} \\
   &\iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ \ ku + nv = 1 \\
   &\overset{\text{Bézout}}{\iff} k \wedge n = 1
   \end{aligned}$$
2. On a $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ k \wedge n = 1\right\}$ donc
   $$\operatorname{Card} \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \operatorname{Card}\left\{\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \ k \wedge n = 1\right\} = \operatorname{Card} \mathcal{E}_n = \varphi(n).$$
   Ainsi, l'ordre du groupe $\mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est $\varphi(n)$.
3. Si $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \wedge n = 1$ alors $\overline{k} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et par suite, $\overline{k}^{\varphi(n)} = \overline{1}$ i.e. $k^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.
4. Liste des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

```
def pgcd(a,b):
    while b!=0:
        a, b = b, a % b
    return a

def InvPhi(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        L = [k for k in range(1,n) if pgcd(n,k)==1]
        return L, len(L)
```

Q4. Soit p un nombre premier.

1. Comme p est premier alors $\mathcal{E}_p = \{1, \ldots, p-1\}$ donc $\varphi(p) = p - 1$. Par ailleurs, $\varphi(n) \leq n - 1$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi, $\max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \varphi(k) = n - 1$.
2. Si k est un entier et p un nombre premier non diviseur de k, alors $k \wedge p = 1$ et d'après le théorème d'Euler, $k^{\varphi(p)} \equiv 1\ [p]$. Or $\varphi(p) = p - 1$, donc $k^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Partie III : Calcul de $\varphi(n)$.

Q5. Soit r un entier ≥ 1.

1. Si $k \notin \mathcal{E}_{p^r}$ alors $k \wedge p^r = d \geq 2$ donc $d \mid k$ et $d \mid p^r$ i.e. $d \mid k$ et $d = p^s$ avec $s \geq 1$. On a alors $p^s \mid k$ et par suite, $p \mid k$.
   Inversement, si $p \mid k$ alors $k \wedge p^r \geq p \geq 2$ donc $k \wedge p^r \neq 1$ i.e. $k \notin \mathcal{E}_{p^r}$.
2. D'après la question précédente,
$$\begin{aligned} k \in [\![0, p^r - 1]\!] \setminus \mathcal{E}_{p^r} &\iff p \mid k \\ &\iff 0 \leq k \leq p^r - 1 \text{ et } \exists q \in \mathbb{N},\ k = pq \\ &\iff 0 \leq q \leq \left\lfloor \frac{p^r - 1}{p} \right\rfloor \\ &\iff 0 \leq q \leq p^{r-1} - 1. \end{aligned}$$
   Il y a donc p^{r-1} éléments de $[\![0, p^r - 1]\!]$ qui ne sont pas premiers avec p^r. D'où $\operatorname{Card}\left([\![0, p^r - 1]\!] \setminus \mathcal{E}_{p^r}\right) = p^{r-1}$.
3. On a : $\operatorname{Card}[\![0, p^r - 1]\!] = \operatorname{Card}\left([\![0, p^r - 1]\!] \setminus \mathcal{E}_{p^r}\right) + \operatorname{Card}\mathcal{E}_{p^r}$ donc
$$\varphi(p^r) = \operatorname{Card}\mathcal{E}_{p^r} = \operatorname{Card}[\![0, p^r - 1]\!] - \operatorname{Card}\left([\![0, p^r - 1]\!] \setminus \mathcal{E}_{p^r}\right) = p^r - p^{r-1}.$$

Q6. Soient m, n deux entiers ≥ 2 premiers entre eux.

1. Soit $(\overline{a}^m, \overline{b}^n) \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Il existe $(\overline{k}^m, \overline{\ell}^n) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que
$$(\overline{a}^m, \overline{b}^n).(\overline{k}^m, \overline{\ell}^n) = (\overline{1}^m, \overline{1}^n).$$
   D'après le théorème des restes chinois, il existe $\overline{c}^{mn} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ unique et $\overline{d}^{mn} \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ unique tels que :
$$f(\overline{c}^{mn}) = (\overline{c}^m, \overline{c}^n) = (\overline{a}^m, \overline{b}^n) \text{ et } f(\overline{d}^{mn}) = (\overline{d}^m, \overline{d}^n) = (\overline{k}^m, \overline{\ell}^n).$$
   Pour conclure, il suffit de vérifier que $\overline{c}^{mn} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$. On a : $(\overline{c}^m, \overline{c}^n).(\overline{k}^m, \overline{\ell}^n) = (\overline{1}^m, \overline{1}^n)$. Ainsi,
$$(\overline{1}^m, \overline{1}^n) = f(\overline{c}^{mn}) f(\overline{d}^{mn}) = f(\overline{cd}^{mn}) = (\overline{cd}^m, \overline{cd}^n)$$
   i.e. $\overline{cd}^m = \overline{1}^m$ et $\overline{cd}^n = \overline{1}^n$. Les entiers m et n sont premiers entre eux, donc $\overline{c}^{mn}\overline{d}^{mn} = \overline{1}^{mn}$ et par suite, $\overline{c}^{mn} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$. Ainsi, on a montrer que :
$$\forall (\overline{a}^m, \overline{b}^n) \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),\ \exists!\ \overline{c}^{mn} \in \mathbb{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) \text{ tel que } g(\overline{c}^{mn}) = (\overline{a}^m, \overline{b}^n).$$
   Finalement, g est bijective.
2. D'après la question précédente et la question Q2 :
$$\varphi(mn) = \operatorname{Card}\mathbb{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) = \operatorname{Card}\mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \operatorname{Card}\mathbb{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \operatorname{Card}\mathbb{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Q7. Soit n est un entier ≥ 2 et $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en facteurs premiers. (les p_i sont distincts deux à deux). Les entiers $p_i^{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq r$ sont premiers entre eux deux à deux donc d'après la question précédente,
$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(p_i^{\alpha_i}) \overset{\text{question } Q5.3}{=} \prod_{i=1}^{r} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

D'où $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

Partie IV : L'identité $n = \sum_{d\in\mathcal{D}_n}\varphi(d)$.

Q8. **1.** Soit $k \in \mathcal{E}_d$. On a $k\wedge d = 1$ et d'après la question Q1. 2, on a $\frac{n}{d}.\overline{k} = \overline{\frac{n}{d}.k}$ est d'ordre $\frac{n}{n\wedge\frac{n}{d}.k}$. Or

$$\frac{n}{n\wedge\frac{n}{d}.k} = \frac{dn}{dn\wedge kn} = \frac{dn}{n(d\wedge k)} = \frac{dn}{n} = d.$$

Ainsi, si $k\in\mathcal{E}_d$ alors $h(k)\in\mathcal{O}_d$ et par suite, h est bien définie.

2. Soit $(k,\ell)\in\mathcal{E}_d^2$. On a

$$h(k) = h(\ell) \implies \frac{n}{d}.\overline{k} = \frac{n}{d}.\overline{\ell} \implies \overline{k} = \overline{\ell} \implies n \text{ divise } k-\ell.$$

Si $k\neq\ell$ alors $n\leq|k-\ell|$ mais $0\leq k,\ell\leq d-1$ donc $|k-\ell|\leq d-1\leq n-1$ et donc $n\leq|k-\ell|\leq n-1$ ce qui est absurde. Ainsi, $k=\ell$ et h est injective.

3. Soit $\overline{\ell}\in\mathcal{O}_d$. On a $d.\overline{\ell} = \overline{0}$ donc il existe $k'\in\mathbb{N}$ tel que $d\ell = k'n$. La division euclidienne de k' par d donne $k' = dq+k$ avec $0\leq k\leq d-1$. Donc $\ell = nq + \frac{n}{d}.k$ et par suite, $\overline{\ell} = \frac{n}{d}\overline{k} = h(k)$.
Il reste à vérifier que $k\in\mathcal{E}_d$. On a $k\in[\![0,d-1]\!]$ et $\overline{\ell}$ est d'ordre d. D'après la question Q1. 2, $d = \frac{n}{n\wedge\ell}$.
Aussi,

$$n(d\wedge k) = n(k'\wedge d) = nk'\wedge nd = \ell d\wedge nd = d(n\wedge\ell) = n$$

donc $d\wedge k = 1$. Ainsi, on a montrer que :

$$\forall\overline{\ell}\in\mathcal{O}_d,\ \exists k\in\mathcal{E}_d \text{ tel que } h(k) = \overline{\ell}.$$

Finalement, h est surjective.

4. Si $\overline{k}\in\mathcal{O}_d\bigcap\mathcal{O}_{d'}$ alors $\overline{k}$ est d'ordre d et d' donc $d = d'$ puisque l'ordre d'un élément dans un groupe est unique. Ainsi, les $\mathcal{O}_d$ pour $d\in\mathcal{D}_n$ sont disjoints deux à deux. Aussi, un élément $\overline{k}$ du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est d'ordre fini d car le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est d'ordre fini, et on sait que, dans un groupe, l'ordre d'un éléments divise d'ordre du groupe donc $d\in\mathcal{D}_n$ i.e. $\overline{k}\in\mathcal{O}_d$. D'où $(\mathcal{O}_d)_{d\in\mathcal{D}_n}$ forme une partition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Q9. On a

$$n = \operatorname{Card}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \operatorname{Card}\bigcup_{d\in\mathcal{D}_n}\mathcal{O}_d = \sum_{d\in\mathcal{D}_n}\operatorname{Card}\mathcal{O}_d = \sum_{d\in\mathcal{D}_n}\operatorname{Card}\mathcal{E}_d = \sum_{d\in\mathcal{D}_n}\varphi(d).$$

D'où $n = \sum_{d\in\mathcal{D}_n}\varphi(d)$.

Q10. Les diviseurs de p^r sont les p^i pour i allant de 0 à r donc

$$\Theta(p^r) = \sum_{i=0}^{r}\varphi(p^i) \overset{\text{question } Q5.3}{=} \underbrace{\varphi(1)}_{=1} + \sum_{i=1}^{r}(p^i - p^{i-1}) = 1 + p^r - p^0 = p^r$$

donc $\Theta(p^r) = p^r$.

Q11. **1.** Soient $(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_{m_1}\times\mathcal{D}_{m_2}$. Si d_1 divise m_1 et d_2 divise m_2, alors d_1d_2 divise m_1m_2 donc $d_1d_2\in\mathcal{D}_{m_1m_2}$ et l'application ϕ est bien définie.

2. Considérons $((d_1,d_2),(d_1',d_2'))\in(\mathcal{D}_{m_1},\mathcal{D}_{m_2})^2$ tel que $d_1d_2 = d_1'd_2'$. Comme d_1 divise m_1 qui est premier avec m_2 et d_2' divise m_2, d_1 est premier avec d_2'. D'après le théorème de Gauss, d_1 divise d_1'. De même d_1' divise d_1 donc $d_1 = d_1'$ (on ne s'interesse aux diviseurs positifs). On obtient alors $d_2 = d_2'$ ce qui permet de conclure que ϕ est injective.

3. Soit $d \in \mathcal{D}_{m_1m_2}$. On décompose d en un produits de facteurs premiers distincts : $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, p_i divise m_1m_2 et p_i est premier donc p_i divise m_1 ou p divise m_2 mais p_i ne peut pas diviser m_1 et m_2. On peut donc écrire

$$[\![1, r]\!] = \underbrace{\left\{i \in [\![1, r]\!],\ \ p_i \mid m_1\right\}}_{=I_1} \bigcup \underbrace{\left\{i \in [\![1, r]\!],\ \ p_i \mid m_2\right\}}_{=I_2} = I_1 \bigcup I_2.$$

I_1 et I_2 forment une partition de $[\![1, r]\!]$. Par conséquent, si on pose $d_1 = \prod_{i\in I_1} p_i^{\alpha_i}$ et $d_2 = \prod_{i\in I_2} p_i^{\alpha_i}$, on a $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_{m_1} \times \mathcal{D}_{m_2}$ et $d = \phi(d_1, d_2)$. Ceci nous permet de conclure que ϕ est surjective.

4. On a

$$\begin{aligned}\Theta(m_1)\Theta(m_2) &= \left(\sum_{d_1\in\mathcal{D}_{m_1}} \varphi(d_1)\right)\left(\sum_{d_2\in\mathcal{D}_{m_2}} \varphi(d_2)\right)\\ &= \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_{m_1}\times\mathcal{D}_{m_2}} \varphi(d_1)\varphi(d_2)\\ &= \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_{m_1}\times\mathcal{D}_{m_2}} \varphi(d_1d_2)\\ &\quad \text{car } m_1 \wedge m_2 = 1 \text{ et donc } d_1 \wedge d_2 = 1 \text{ et d'après la question } Q6.2.\ \varphi(d_1)\varphi(d_2) = \varphi(d_1d_2).\\ &= \sum_{d\in\mathcal{D}_{m_1m_2}} \varphi(d) \quad \text{question précèdente}\\ &= \Theta(m_1m_2).\end{aligned}$$

Ainsi, $\Theta(m_1)\Theta(m_2) = \Theta(m_1m_2)$.

Q12. Pour $n = 1$ la relation est vraie. Supposons $n \geq 2$, on ecrit la décomposition de n en facteurs premiers distincts : $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Les entiers $p_i^{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq r$ sont premiers entre eux deux à deux donc d'après la question précédente,

$$\Theta(n) = \Theta\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r} \Theta\left(p_i^{\alpha_i}\right) \overset{\text{question } Q10.}{=} \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} = n.$$

Finalement, pour tout entier $n \geq 1$, $\ n = \sum_{d\in\mathcal{D}_n} \varphi(d)$.

Problème 2

Partie I :

Q1. **1.** On a $\mathrm{d}(x_0, H) = \inf_{y\in H} \|x_0 - y\|$, donc par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de H tels que $\|x_0 - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{d}(x_0, H)$.

2. En particulier, la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n\geq 0}$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\|x_0 - y_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|y_n\| = \|x_0 - y_n - x_0\| \leq \|x_0 - y_n\| + \|x_0\| \leq M + \|x_0\|$$

et la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie (E est de dimension finie), il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \in E$.
Aussi, H est le noyau d'une forme linéaire h non nulle sur E, donc h est continue car E est de dimension finie, donc $H = \ker h = h^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue h et par suite, $y \in H$. Ainsi, la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence dans H.

3. On a $\|x_0 - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{d}(x_0, H)$ et $\|x_0 - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|x_0 - y\|$ donc par unicité de la limite,

$$\|x_0 - y\| = \mathrm{d}(x_0, H) \text{ avec } y \in H.$$

Ainsi, $\forall x \in E,\ \exists y \in H,\ \ \mathrm{d}(x_0, H) = \|x_0 - y\|$.

Q2. **1.** On a $\ker h = h^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue h.

2. **a.** Par hypothèse, h n'est pas continue donc $\forall M > 0,\ \exists x \in E$ tel que $|h(x)| > M\|x\|$. Pour $M = n+1$, il existe $x_n \in E$ tel que $|h(x_n)| > (n+1)\|x_n\|$. En particulier, $(x_n)_{n\geq 0} \notin \ker h = H$.
Posons alors $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$. On a

$$\|t_n\| < \frac{1}{n+1} \text{ donc } t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \text{ et } \ h(t_n) = h\left(\frac{x_n}{h(x_n)}\right) = \frac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1.$$

Ainsi, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0 \quad \text{et} \quad h(t_n) = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b. Pour chaque n on a alors $h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$. Par suite, pour chaque n le vecteur $t_n - t_0$ est dans H ou encore la suite $(t_n - t_0)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de H. Cette suite est de plus convergente vers $-t_0$. Mais le vecteur $-t_0$ n'est pas dans H car $h(-t_0) = -h(t_0) = -1 \neq 0$.
En résumé, la suite $(t_n - t_0)_{n\geq 0}$ est une suite convergente d-éléments de H dont la limite n'est pas dans H ce qui montre que H n'est pas fermé. Par contraposition, on a montré que si H est fermé alors h est continue sur E.

3. Tout d'abord, $0 \in H \subset \overline{H}$ donc $\overline{H} \neq \emptyset$. Soient $(x, y) \in \overline{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$. La suite $(x_n + \lambda y_n)_n$ est une suite d'éléments de H (car H est un sev de E) et converge vers $x + \lambda y$, donc $x + \lambda y \in \overline{H}$. Par suite, $\overline{H}$ est un sev de E.

4. Soient H un hyperplan de E puis h une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker h$.

- Si h est continue sur E, alors H est fermé et donc $\overline{H} = H$.
- Si h n'est pas continue, $\overline{H}$ est un sev de E contenant strictement l'hyperplan H. Soit $a \in \overline{H} \setminus H$. On a

$$E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(a) \subset H \oplus \overline{H} \subset \overline{H}$$

donc $\overline{H} = E$.

Partie II :

Q3. Soit $x_0 \in E$ fixé.

1. Pour tout $y \in H$, on a

$$|h(x_0)| = |h(x_0) - h(y)| = |h(x_0 - y)| \leq ||| h ||| \, \|x_0 - y\|$$

donc $\|x_0 - y\| \geq \dfrac{|h(x_0)|}{||| h |||}$.

2. D'après la question précédente, $\dfrac{|h(x_0)|}{||| h |||}$ est un minorant de l'ensemble $\left\{\|x_0 - y\|,\ \ y \in H\right\}$ donc

$$\mathrm{d}(x_0, H) = \inf_{y\in H} \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{||| h |||}.$$

Ainsi, $\mathrm{d}(x_0, H) \geq \dfrac{|h(x_0)|}{||| h |||}$.

3. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(x_0,H)=0 &\iff \exists (y_n)_n\in H^{\mathbb{N}},\ \ \|x_0-y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\\
&\iff \exists (y_n)_n\in H^{\mathbb{N}},\ \ y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0\\
&\iff x_0\in \overline{H}\\
&\iff x_0\in H \quad \text{car } H \text{ est fermé puisque } h \text{ est continue}
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}(x_0,H)=0 \iff x_0\in H$.

Q4. On considère dans cette question $x_0\notin H$.

1. Puisque $||| \ h\ ||| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|h(x)|}{\|x\|}$, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(w_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $E\setminus\{0\}$ vérifiant :

$$||| \ h\ ||| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $x_0\in E\setminus H$, on a $E=H\oplus \mathrm{Vect}\,(x_0)$ donc il existe un réel λ_n et un vecteur y_n de H tel que : $w_n=\lambda_n x_0+y_n$.

3. L'inégalité est vraie si $w_n\in H$. Sinon, λ_n est non nul et donc

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}=\frac{|h(\lambda_n x_0)|}{\|\lambda_n x_0+y_n\|}=\frac{|\lambda_n|\,|h(x_0)|}{\|\lambda_n x_0+y_n\|}=\frac{|h(x_0)|}{\left\|x_0+\dfrac{1}{\lambda_n}y_n\right\|}$$

et puisque $\dfrac{1}{\lambda_n}y_n\in H$, on a $\left\|x_0+\dfrac{1}{\lambda_n}y_n\right\|\geq \mathrm{d}(x_0,H)>0$. Finalement,

$$\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}\leq\frac{|h(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0,H)}.$$

Q5. Soit $x_0\in E$.

- Si $x_0\in H$, le résultat est valable puisque d'après la question $Q3.3$, on a $\mathrm{d}(x_0,H)=h(x_0)=0$.
- Si $x_0\notin H$ alors, quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente et d'après la question $Q4.1$, on obtient $||| \ h\ ||| \leq \dfrac{|h(x_0)|}{\mathrm{d}(x_0,H)}$ ou encore $\mathrm{d}(x_0,H)\leq\dfrac{|h(x_0)|}{||| \ h\ |||}$ donc (question $Q3.2$) $\mathrm{d}(x_0,H)=\dfrac{|h(x_0)|}{||| \ h\ |||}$. D'où :

$$\forall x_0\in H,\ \ \mathrm{d}(x_0,H)=\frac{|h(x_0)|}{||| \ h\ |||}.$$