

Devoir de contrôle N°2

Q1. Répondez par V (vrai) ou par F (faux) aux affirmations suivantes.

1. Dans un evn, toute suite convergente possède une unique valeur d'adhérence.
2. Dans un evn, toute suite possède une unique valeur d'adhérence est convergente.
3. Toute suite bornée de réels ou de complexes possède une unique valeur d'adhérence.
4. Une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.
5. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
6. Une partie ne peut pas être à la fois ouverte et fermée.
7. Une partie est ouverte ou fermée.
8. $[0, 1[$ est un ouvert relatif à $\mathbb{R}_+$.
9. Toute application continue est uniformément continue.
10. Toute application continue sur un compact est uniformément continue.
11. Toute application linéaire sur un evn est continue
12. Tout compact est fermée et bornée.
13. En dimension finie, les boules fermées sont compacts.
14. Une partie fermée et bornée est compacte.
15. En dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.
16. Une suite est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.
17. Toute partie étoilée est connexe par arcs.
18. Toute partie convexe est connexe par arcs.
19. Toute partie connexe par arcs est convexe.
20. Toute partie qui possède deux composantes connexes par arcs est connexe par arcs.

V
F
F
F
V
F
F
V
F
V
F
V
V
F
V
F
V
V
F
F

Q2. On pose $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit :

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt, \quad N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)| dt.$$

1. Montrer que N_2 est une norme sur E .

→ Séparation : st $f \in E$
 $N_2(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt = 0$
 $\Rightarrow f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$
 car f' est unive et positive $\Rightarrow f'(t) = 0$ et $f(t) = 0, \forall t \in (0, 1)$
 sur $[0, 1]$ $\Rightarrow f(0) = 0$ et f constante sur $(0, 1)$ donc $f = 0$.

→ Homogénéité : st $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$
 On a : $N_2(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt = |\lambda| N_2(f)$.

→ Inégalité triangulaire : st $f, g \in E$
 On a :
 $N_2(f+g) = |f(0)+g(0)| + \int_0^1 |f'(t)+g'(t)| dt$
 $\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt + \int_0^1 |g'(t)| dt$
 $= N_2(f) + N_2(g)$.

2. Montrer que N_3 est une norme sur E .

On remarque que $\forall f \in E: N_3(f) = |f(0)| + N_2(f')$.

→ Séparation: si $f \in E$.

$$N_3(f) = 0 \Rightarrow |f(0)| + N_2(f') = 0$$

$$\Rightarrow |f(0)| = 0 \text{ et } f' = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est constante sur } (0, 1)$$

$$\Rightarrow f = 0$$

Homogénéité: si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$.

$$N_3(\lambda f) = |\lambda f(0)| + N_2(\lambda f')$$

$$= |\lambda| |f(0)| + |\lambda| N_2(f')$$

$$= |\lambda| N_3(f)$$

→ Inégalité triangulaire: si $f, g \in E$.

$$N_3(f+g) = |f(0)+g(0)| + N_2(f'+g')$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + N_2(f') + N_2(g')$$

$$= N_3(f) + N_3(g)$$

3. Prouver que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq N_2(f) \leq N_3(f)$.

Indication: on pourra utiliser l'identité $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ pour $x \in [0, 1]$.

$$\text{On a: } |f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t) dt| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt$$

$$\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt = N_2(f)$$

$$\text{donc } \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 N_2(f) dt = N_2(f) \text{ donc } \boxed{N_1(f) \leq N_2(f)}$$

$$\text{On a: } N_2(f) = |f(0)| + N_1(f')$$

$$\text{car } f \in C^1 \leq |f(0)| + N_2(f') = N_3(f)$$

$$\text{donc } \boxed{N_2(f) \leq N_3(f)}$$

4. Prouver que, deux à deux, ces normes ne sont pas équivalentes.

Indication: on pourra considérer la suite $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = t^n$.

on a: $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$; $N_2(f_n) = 2$; $N_3(f_n) = n$.

$\frac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$; $\frac{N_3(f_n)}{N_2(f_n)} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

et $\frac{N_3(f_n)}{N_1(f_n)} = n(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Dans les normes N_2 , N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes

Q3. On fixe un réel $a \in]0, 1[$ et on considère l'espace vectoriel $E = C([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|.$$

1. On pose, pour $t \in [0, a]$, $f_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k$, ($n \in \mathbb{N}$) et $f(t) = \frac{1}{1-t}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N_\infty(f_n - f) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

st $f \in C([0, a])$; on a:

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| \sum_{k=0}^n t^k - \frac{1}{1-t} \right|$$

$$= \left| \frac{1-t^{n+1}}{1-t} - \frac{1}{1-t} \right|$$

$$= \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

donc $N_\infty(f_n - f) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$

2. En déduire que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ pour la norme N_∞ .

comme $a \in]0, 1[$, donc $a^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

donc $N_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ pour N_∞ .

3. On note F l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, a]$. F est-il un fermé de (E, N_∞) ? justifier votre réponse.

on a: $(f_n)_n \in F$ et $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ pour N_∞

mais $f \notin F$ donc F n'est pas un fermé.

Q4. On muni $\mathbb{R}^2$ par la norme $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -y\}$ et $b = (0, -1) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $d(b, A) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

st $(n, y) \in A$, on a: $\|b - (n, y)\|_2 = \sqrt{n^2 + (y+1)^2}$

$$= \sqrt{2y^2 + 2y + 1}$$

avec égalitéssi $y = -1/2$, donc $d(b, A) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{2} \sqrt{(y+1/2)^2 + 1/4} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Q5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On a: $A^n = \text{diag}((1/2)^n, \alpha^n, (1/3)^n)$,
 les suites $((1/2)^n)_n$ et $((1/3)^n)_n$ sont convergentes
 donc $(A^n)_n$ c.v.s.s. $(\alpha^n)_n$ c.v.s.s. $\alpha \in]-1, 1[$.

Q6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe $G = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x_n)_n \in \mathbb{R}^n$ et $(n, f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (n, y) \in \mathbb{R}^2$.

donc $\exists (n, y) \in G$ c.à.d. $y = f(x)$?

On a: $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$

f est continue donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$
 par unicité de la limite: $y = f(x)$.

donc $(n, y) = (n, f(x)) \in G$.

donc G est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Q7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour quelle soit lipschitzienne.

f lipschitzienne s.s. f' est bornée sur I (voir le cours).

2. Montrer alors que la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\left(\frac{t}{1+t}\right)' = \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$

donc $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q8. Montrer que l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + y^2 \leq 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, il suffit de montrer que K est fermé et borné.

K fermé: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto |x| + y^2$

On a: $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) \leq 1\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) \in]-\infty, 1]\}$

$= f^{-1}(]-\infty, 1])$

Comme f est continue et $]-\infty, 1]$ est un fermé, alors K est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

K borné: Soit $(x, y) \in K$, on a:

$$|x| \leq |x| + y^2 \leq 1$$

$$y^2 \leq |x| + y^2 \leq 1$$

donc $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$

et $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \leq 2$ donc K est borné.

Q9. On pose $X = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^2 - M^T = I_n\}$.

1. Justifier soigneusement que les applications :

- $\varphi_1: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^T$;
- $\varphi_2: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto (A, A)$;
- $\varphi_3: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A, B) \mapsto AB$;

sont continues.

φ_1 et φ_2 sont linéaires et l'espace de départ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

donc φ_1 et φ_2 sont continues.

φ_3 est bilinéaire et l'espace de départ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

est de dimension finie, donc φ_3 est continue.

2. En déduire que X est fermé.

on a: $X = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \varphi_3 \circ \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = I_n\}$

$$= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / (\varphi_3 \circ \varphi_2 - \varphi_1)(M) = I_n\} = (\varphi_3 \circ \varphi_2 - \varphi_1)^{-1}(I_n)$$

$\varphi_3 \circ \varphi_2 - \varphi_1$ est continue et $\{I_n\}$ est un fermé, donc X est fermé.

Q10. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn et K un compact de E .

1. Soit $a \in E$. Montrer que l'application $f_a : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x - a\|$ est 1-Lipschitzienne sur E .

$$\text{Soit } (x, y) \in E^2 \text{ on a : } \|x - a\| = \|x - a + y - y - a + a\|$$

$$\leq \|y - a\| + \|x - a - (y - a)\|$$

$$\text{donc } \|x - a\| - \|y - a\| \leq \|x - y\|$$

$$\text{de même } \|y - a\| - \|x - a\| \leq \|x - y\|$$

$$\text{donc } |f_a(x) - f_a(y)| \leq \|x - y\| \text{ c'ad } f_a \text{ est 1-lipschitzienne.}$$

2. En déduire l'existence d'un x_0 dans K tel que $d(a, K) = \|x_0 - a\|$.

Comme f_a est continue (car lipschitzienne) sur le compact K

donc par le théorème des bornes atteintes, f_a est bornée

et atteint ses bornes : $\exists u_0 \in K$ tq $\inf_{u \in K} f_a(u) = f_a(u_0)$

d'où $\exists u_0 \in K$ tq $d(a, K) = \|u_0 - a\|$.

- Q11. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Justifier soigneusement l'égalité : $\lim_{k \rightarrow +\infty} AM_k B = A \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k \right) B$.

L'application $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ est linéaire et $f(M) = AMB$

L'espace $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc f est continue, par suite : $\lim_{k \rightarrow +\infty} AM_k B = A \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k \right) B$.

- Q12. On désigne par $\|\cdot\|_2$ la norme usuelle sur $M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2} \text{ où } A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que, pour tout A dans $M_n(\mathbb{K})$, $|\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|_2$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$.

$$\text{On a : } (\text{Tr}(A))^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$$

$$\text{car } A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$\leq n \|A\|_2^2$$

$$\text{donc } |\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \quad (*)$$

2. En déduire que $\| \text{Tr} \| = \sqrt{n}$.

d'après (*), $\| \text{Tr} \| \leq \sqrt{n}$, pour $A = I_n$ on a l'égalité :

$$|\text{Tr}(A)| = \sqrt{n} \|A\|_2 \text{ d'où } \| \text{Tr} \| = \sqrt{n}.$$

Q13. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{K})$. Prouver :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| \leq k \|A\| \|B\|.$$

L'application $f: M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$
 $(A, B) \longmapsto AB$

est bilinéaire et l'espace de départ $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$
 est de dimension finie donc f est continue.

Donc (d'après le cours) $\exists h \geq 0, \forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2: \|f(A, B)\| \leq h \|A\| \|B\|.$

Q14. Soit E un evn et C une partie convexe de E . Montrer que $\bar{C}$ est convexe.

Soit $x, y \in \bar{C}$ et $t \in [0, 1]$.

Il existe $(x_n)_n \in C$ et $(y_n)_n \in C$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$.

C'est-à-dire x_n dans C donc $t x_n + (1-t) y_n \in C$.

et $t x + (1-t) y = \lim_{n \rightarrow \infty} (t x_n + (1-t) y_n) \in \bar{C}$.

donc $\bar{C}$ est convexe.

Q15. Soient E un evn de dimension finie, K un compact de E et λ un scalaire non nul.

Montrer que $\lambda.K$ est un compact de E . (on rappelle que $\lambda.K = \{\lambda.x, x \in K\}$)

Soit $f_\lambda: E \longrightarrow E$ et $f_\lambda(x) = \lambda.x$.

Soit $(x, y) \in E^2$ on a: $\|f_\lambda(x) - f_\lambda(y)\| = \|\lambda.x - \lambda.y\|$
 $= |\lambda| \|x - y\|.$

Donc f_λ est lipschitzienne donc continue.

De plus $\lambda.K = f_\lambda(K)$ est un compact.

Comme image directe du compact K par l'app. continue f_λ .

Q16. Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto \int_0^1 e^t f(t) dt$

1. Montrer que φ est linéaire et continue.

$$\text{Soit } f, g \in E; \lambda \in \mathbb{R}. \text{ On a :}$$

$$\varphi(f + \lambda g) = \int_0^1 e^t (f(t) + \lambda g(t)) dt$$

$$= \int_0^1 e^t f(t) dt + \lambda \int_0^1 e^t g(t) dt$$

$$\text{donc } \varphi \text{ est linéaire.} \quad \varphi(f) + \lambda \cdot \varphi(g)$$

$$\text{Soit } f \in E \text{ on a : } |\varphi(f)| = \left| \int_0^1 e^t f(t) dt \right|$$

$$\text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \leq \sqrt{\int_0^1 e^{2t} dt} \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)} \|f\|_2$$

donc φ est continue.

2. Montrer que $\|\varphi\| = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$.

D'après la question précédente, $\|\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$

$$\text{Pour } f(t) = e^t : \text{ on a l'égalité : } |\varphi(f)| = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)} \|f\|_2$$

$$\text{donc } \|\varphi\| = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$$

Q17. Montrer que l'ensemble $A = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ est connexe par arcs.

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\theta \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

f est continue car chaque fct coordonnée l'est.

$$\text{D.e plus } A = \{ f(\theta) / \theta \in \mathbb{R} \} = f(\mathbb{R})$$

$\mathbb{R}$ est connexe par arcs.

donc A est connexe par arcs.