

Q3. On fixe un réel $a \in]0, 1[$ et on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, a], \mathbb{R})$ muni de la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|.$$

1. On pose, pour $t \in [0, a]$, $f_n(t) = \sum_{k=0}^n t^k$, ($n \in \mathbb{N}$) et $f(t) = \frac{1}{1-t}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N_\infty(f_n - f) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

2. En déduire que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ pour la norme N_∞ .

3. On note F l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, a]$. F est-il un fermé de (E, N_∞) ? justifier votre réponse.

Q4. On muni $\mathbb{R}^2$ par la norme $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -y\}$ et $b = (0, -1) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $d(b, A) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

.....
.....

Q5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Q6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe $G = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Q7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour quelle soit lipschitzienne.

.....

2. Montrer alors que la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.

1. Soit $a \in E$. Montrer que l'application $f_a : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \|x - a\|$ est 1-Lipschitzienne sur E .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. En déduire l'existence d'un x_0 dans K tel que $d(a, K) = \|x_0 - a\|$.

.....

.....

.....

.....

.....

- Q11.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifier soigneusement l'égalité : $\lim_{k \rightarrow +\infty} AM_k B = A \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k \right) B$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Q12.** On désigne par $\|\cdot\|_2$ la norme susuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2} \text{ où } A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que, pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|\text{Tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|_2$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n, \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. En déduire que $\|\text{Tr}\| = \sqrt{n}$.

.....

.....

.....
.....
.....
.....

Q13. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| \leq k \|A\| \|B\|.$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Q14. Soit E un evn et C une partie convexe de E . Montrer que $\overline{C}$ est convexe.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Q15. Soient E un evn de dimension finie, K un compact de E et λ un scalaire non nul.

Montrer que $\lambda.K$ est un compact de E . (on rappelle que $\lambda.K = \{\lambda.x, x \in K\}$)

