Chapitre 3

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

1. Compléments d'algèbre linéaire
2. Sous-espaces stables, éléments propres
3. Polynôme caractéristique
4. Diagonalisabilité
5. Trigonalisabilité
6. Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Plan

1. Compléments d'algèbre linéaire
2. Sous-espaces stables, éléments propres
3. Polynôme caractéristique
4. Diagonalisabilité
5. Trigonalisabilité
6. Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Somme de sous-espaces vectoriels

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.1 (somme et somme directe d'une famille finie de sev).

1. On appelle ***somme*** des sev $F_1, \ldots, F_r$ de E, l'ensemble notée $\sum_{i=1}^{r} F_i$ définie par :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} F_i \overset{\text{déf}}{=} \left\{x \in E,\ \ x = \sum_{i=1}^{r} x_i \ \text{ où }\ (x_1, \ldots, x_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r\right\}}.$$

2. On dit que les sev $F_1, \ldots, F_r$ de E sont en ***somme directe*** et on note $\sum_{i=1}^{r} F_i = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ si :

$$\boxed{\forall (x_1, \ldots, x_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r,\ \ \sum_{i=1}^{r} x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1, r]\!],\ \ x_i = 0}.$$

$x \in \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \iff \exists!(x_1,\dots,x_r) \in F_1 \times \dots \times F_r,\ x = \sum_{i=1}^{r} x_i$. (La décomposition dans $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ est unique)

Proposition 1.1 (somme de sous-espaces et familles de vecteurs).

Soient $F_1,\dots,F_r$ des sev de E et $\mathcal{E}_i$ une famille de vecteurs de $F_i, 1 \le i \le r$.

1. *Si, chaque $\mathcal{E}_i$ est génératrice de F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i$ est génératrice de $\sum_{i=1}^{r} F_i$.*
2. *Supposons que la somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est directe.*
   - *Si, chaque $\mathcal{E}_i$ est libre, alors $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i$ est libre dans $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.*
   - *Si, chaque $\mathcal{E}_i$ est une base de F_i, alors $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{E}_i$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.*

Définition 1.2 (base adaptée à une décomposition en somme directe).

Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sev de E de dimension finie et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i, $1 \leq i \leq r$. La famille $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ est une base (la réunion étant ordonnée) de $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} F_i$ dite ***base adaptée à la décomposition*** $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} F_i$.

Proposition 1.2 (caractérisation d'une somme directe).

Soient $F_1, \ldots, F_r$ *des sev de* E. *La somme* $\sum\limits_{i=1}^{r} F_i$ *est directe*[1] *si, et seulement si,* $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $F_j \bigcap \left(\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} F_i \right) = \{0_E\}$.

[1] Lorsque $r \geq 3$, on peut avoir $\bigcap\limits_{i=1}^{r} F_i = \{0\}$ ou $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j$ sans que la somme $\sum\limits_{i=1}^{r} F_i$ soit directe.

Théorème 1.1 (caractérisation des sommes directes en dimension finie).

Soient $F_1, \ldots, F_r$ *des sev de dimension finie. On a*

$$\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim F_i},$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est ***directe****.*

Définition 1.3 (sev supplémentaires).

On dit que les sev $F_1, \ldots, F_r$ de E sont ***supplémentaires dans*** E lorsque

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i}.$$

Cas de la somme de deux sev : rappel MPSI

1. Lorsque E est de dimension quelconque.

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{cases} \forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \\ \text{tel que } \ x = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0\} \end{cases}$$

2. Supposons E de dimension finie et soient $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) une base de F_1 (resp. de F_2). On a :

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases} .$$

$$\iff \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ base de } E$$

Proposition 1.3 (projecteurs associés à une décomposition de l'espace).

Soit $F_1, \dots, F_r$ *des sev de* E *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. *Posons, pour* $j \in [\![1, r]\!]$, $E_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} F_i$.

1. *Pour tout* $j \in [\![1, r]\!]$, $E = F_j \oplus E_j$.
2. *Si* p_j *est la projection sur* F_j *parallèlement à* E_j, *on a :*

$$\begin{cases} p_i \circ p_j = 0 & \textit{pour tout} \quad i \neq j \\ p_i \circ p_i = p_i & \textit{pour tout} \quad i \in [\![1, r]\!] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{Id}_E & \end{cases}.$$

Les p_i, $1 \leq i \leq r$ *sont appelés les* ***projecteurs associés*** *à la somme directe* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Théorème 1.2 (somme directe d'applications linéaires).

Soient $F_1, \dots, F_r$ *des sev de* E *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ *et pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$, $u_i \in \mathcal{L}(F_i, F)$. *Alors il existe une et une seule application* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que*

$$\boxed{u_{|F_i} = u_i \quad \text{pour tout} \quad i \in [\![1, r]\!]}.$$

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, alors Id_E est l'unique application linéaire de E dans E dont la restriction à chaque F_i est p_i.

Matrices définies par blocs

Soient :

- $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ (n_1,\dots,n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r,\ (p_1,\dots,p_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tels que
$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n \ \text{ et } \ \sum_{j=1}^{s} p_j = p.$$
- $(n',p') \in (\mathbb{N}^*)^2,\ (n'_1,\dots,n'_{r'}) \in (\mathbb{N}^*)^{r'},\ (p'_1,\dots,p'_{s'}) \in (\mathbb{N}^*)^{s'}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{r'} n'_i = n' \ \text{ et } \ \sum_{j=1}^{s'} p'_j = p'.$$

Définition 1.4 (matrice par blocs).

1. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est ***écrite par blocs*** lorsque

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,s} \end{pmatrix}$$

avec $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,s]\!]$.

2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ***écrite par blocs*** lorsque

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,r} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,r} \end{pmatrix}$$

avec

- $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$.
- Les ***blocs diagonaux*** $A_{i,i}$ sont des matrices ***carrées*** : $A_{i,i} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.

Interprétation géométrique des blocs
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut considérer que A représente une application linéaire de E (espace de dimension p) dans F (espace de dimension n) relativement à deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ adaptées à deux décompositions en somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 1.4 (combinaison linéaire).

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A,\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ décomposées en blocs :

$$A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq s}} \text{ et } B = \left(B_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq s}}$$

où $A_{i,j},\ B_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ (même découpage). Alors $\lambda.A + B$ admet la décomposition par blocs (avec même découpage) :

$$\lambda.A + B = \left(\lambda.A_{i,j} + B_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq s}}.$$

Proposition 1.5 (produit par blocs).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *décomposées en blocs :*

$$A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s}} \quad \text{et} \quad B = \left(B_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le r' \\ 1 \le j \le s'}}$$

où $r' = s$ *et* $(n'_1, \dots, n'_{r'}) = (p_1, \dots, p_s)$. *Alors* AB *admet la décomposition en blocs :*

$$AB = \left(C_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le s'}} \quad \text{avec} \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{r'} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2, C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}), A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\begin{pmatrix} a & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + LC_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. (scalaire)
- $\begin{pmatrix} b \\ C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & bL \\ aC_1 & C_1 L \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.
- $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_1 + BC_2 \\ CC_1 + DC_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 1.6 (transposition par blocs).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *décomposée en blocs :* $A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq r \\ 1\leq j\leq s}}$. *Alors*

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,s} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1}^\top & A_{2,1}^\top & \dots & A_{r,1}^\top \\ A_{1,2}^\top & A_{2,2}^\top & \dots & A_{r,2}^\top \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1,s}^\top & A_{2,s}^\top & \dots & A_{r,s}^\top \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Proposition 1.7 (matrice triangulaire par blocs).

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***triangulaire supérieure par blocs*** *lorsque*[1]

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux A_i sont des matrices ***carrées*** *: $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. De plus :*

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & \star' & \dots & \star' \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star' \\ 0 & \dots & 0 & A_r^k \end{pmatrix}.$

[1] Définition analogue pour une une ***triangulaire inférieure par blocs***.

2. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, r]\!],\ A_i \in \mathcal{GL}_{n_i}(\mathbb{K})$.
3. Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & A_r^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. $\det A = \prod_{i=1}^{r} \det A_i$.

Proposition 1.8 (matrice diagonale par blocs).

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***diagonale par blocs*** *lorsque*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

et on note $A = \operatorname{diag}\left(A_1, \dots, A_r\right)$ *où les blocs diagonaux* A_i *sont des matrices* ***carrées*** *:* $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$*. De plus :*

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \operatorname{diag}\left(A_1^k, \dots, A_r^k\right)$.
2. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, r]\!], \quad A_i \in \mathcal{GL}_{n_i}(\mathbb{K})$.
3. $\det A = \prod_{i=1}^{r} \det A_i$.
4. *Si* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$*, alors* $A^{-1} = \operatorname{diag}\left(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1}\right)$.

Définition 1.5 (transvections par blocs).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ décomposée par blocs : $A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq r\\ 1\leq j\leq s}}$.

1. Soit $(i,j) \in [[1,r]]^2$ tel que $i \neq j$. Pour toute $M \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}$, l'opération, codée $L_i \longleftarrow L_i + ML_j$, est valide et appelée une ***transvection par blocs sur les lignes***.
2. Soit $(i,j) \in [[1,s]]^2$ tel que $i \neq j$. Pour toute $M \in \mathcal{M}_{p_j,p_i}$, l'opération, codée $C_i \longleftarrow C_i + C_jM$, est valide et appelée une ***transvection par blocs sur les colonnes***.

Invariance du déterminant par des transvections par blocs

Comme les transvections par blocs sont en fait des transvections simultanées sur les lignes ou sur les colonnes, lorsqu'elles portent sur une matrice carrée, ***les transvections par blocs conservent le déterminant*** de cette matrice carrée.

😊

Soient $A \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{K})$. En appliquant l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 - BL_2$, on passe de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathrm{I}_{n_2} \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} A - BC & \mathrm{O}_{n_1,n_2} \\ C & \mathrm{I}_{n_2} \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathrm{I}_{n_2} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A - BC & \mathrm{O}_{n_1,n_2} \\ C & \mathrm{I}_{n_2} \end{pmatrix} \\
&= \det(A - BC) \det(\mathrm{I}_{n_2}) \\
&= \det(A - BC)
\end{aligned}$$

Plan

1. Compléments d'algèbre linéaire
2. Sous-espaces stables, éléments propres
3. Polynôme caractéristique
4. Diagonalisabilité
5. Trigonalisabilité
6. Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Sous-espaces stables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E.

Définition 2.1 (sous-espace stable).

On dit que F est ***stable*** par u si $\boxed{u(F) \subset F}$ c-à-d : $\forall x \in F,\ \ u(x) \in F$.

Proposition 2.1 (opérations).

L'intersection (resp. la somme) de sous-espaces stables par u est stable par u.

Théorème 2.1 (stabilité du noyau et l'image).

Si $(u,v) \in \big(\mathcal{L}(E)\big)^2$ tel que $uv = vu$, alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v. En particulier, $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.

Définition 2.2 (endomorphisme induit).

Lorsque F est stable par u, on appelle ***endomorphisme induit*** par u sur F l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par[1] :

$$\boxed{\forall x \in F, \quad u_F(x) = u(x)}.$$

[1] On distinguera soigneusement l'endomorphisme induit u_F, qui est un endomorphisme F vers F, de la restriction $u_{|F}$ qui est une application linéaire de F vers E.

Proposition 2.2 (opérations).

Soit $(u,v) \in \left(\mathcal{L}(E)\right)^2$. *Si* F *est stable par* u *et* v *alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, F *est stable par* λu, $u+v$ *et* $u \circ v$. *De plus :*

$$(\lambda u)_F = \lambda u_F, \ (u+v)_F = u_F + v_F \ \text{ et } \ (u \circ v)_F = u_F \circ v_F.$$

L'ensemble $\mathcal{A} = \left\{u \in \mathcal{L}(F),\ u(F) \subset F\right\}$ des endomorphismes stabilisant F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et l'application $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ définie par $\varphi(u) = u_F$ est un morphisme d'algèbres.

Théorème 2.2 (version matricielle de la stabilité).

Supposons E est de dimension finie et soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E. On a équivalence entre :

1. *F est stable par u;*
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ *avec* $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *où* $p = \dim F$.

Corollaire 2.1 (cas d'une décomposition de l'espace).

Supposons E *de dimension finie et* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ *tel que chaque sous-espace* F_i *est stable par* u. *Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* E *adaptée à cette décomposition. On a équivalence entre :*

1. $\forall i \in [\![1, r]\!]$, F_i *est stable par* u;
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\big(A_1, \dots, A_r\big)$ *avec* $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{F_i}}(u_{F_i}) \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$ *où* $\alpha_i = \dim F_i$ *pour* $i \in [\![1, r]\!]$.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(M) = M^{\top}$. On a $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

- Les sev $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par u. De plus

$$u_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad u_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = -\mathrm{Id}_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}.$$

- Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\frac{n(n+1)}{2}} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\mathrm{I}_{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$$

avec $\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Éléments propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2.3 (vecteur propre, valeur propre et sous-espace propre).

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est ***valeur propre de*** u si :

$$\boxed{\exists x \in E \setminus \{0_E\}, \quad u(x) = \lambda x}.$$

2. On dit que $x \in E$ est ***vecteur propre de*** u associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{x \neq 0_E \quad \text{et} \quad u(x) = \lambda x}.$$

3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, le ***sous-espace propre de*** u associé à la valeur propre λ est :

$$\boxed{E_\lambda(u) \overset{\text{déf}}{=} \ker\big(\lambda \mathrm{Id}_E - u\big)}.$$

Définition 2.4 (vecteur propre, valeur propre et sous-espace propre).

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est ***valeur propre de*** A si :

$$\boxed{\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, \quad AX = \lambda X}.$$

2. On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est ***vecteur propre de*** A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si :

$$\boxed{X \neq 0 \ \text{ et } \ AX = \lambda X}.$$

3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, le ***sous-espace propre de*** A associé à la valeur propre λ est :

$$\boxed{E_\lambda(A) \overset{\text{déf}}{=} \ker\big(\lambda \mathrm{I}_n - A\big)}.$$

1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie de rapport λ alors λ est l'unique valeur propre de u et $E_\lambda(u) = E$.
2. Soit u l'endomorphisme de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tout réel est valeur propre de u et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \quad E_\lambda(u) = \mathrm{Vect}(t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda t})$.

Définition 2.5 (spectre).

1. Si E de dimension finie, on appelle ***spectre de*** u l'ensemble

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(u) \overset{\text{déf}}{=} \left\{\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \text{ valeur propre de } u\right\}}.$$

2. On appelle ***spectre de*** A l'ensemble

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) \overset{\text{déf}}{=} \left\{\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \text{ valeur propre de } A\right\}}.$$

1 Si E est de dimension finie, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \lambda \mathrm{Id}_E - u \text{ non injectif}\\ &\iff \lambda \mathrm{Id}_E - u \notin \mathcal{GL}(E)\end{aligned}$$

En particulier : $\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(u) \iff u \notin \mathcal{GL}(E)}$.

2 De même, on a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \ker\big(\lambda \mathrm{I}_n - A\big) \neq \{0\}\\ &\iff \lambda \mathrm{I}_n - A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).\end{aligned}$$

En particulier : $\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(A) \iff A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})}$.

3 Soit $u_A \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$ ***l'endomorphisme canoniquement associé à*** A :

$$\begin{array}{rcl} u_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

Alors les éléments propres de A sont respectivement les éléments propres de u_A.

Propriétés des sous-espaces propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2.3 (stabilité).

Si $(u,v) \in \left(\mathcal{L}(E)\right)^2$ tel que $uv = vu$, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par u et

$$\boxed{u_{E_\lambda(u)} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}}$$

pour toute valeur propre λ de u.

Théorème 2.3 (somme directe des sous-espaces propres).

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.

Corollaire 2.2 (liberté d'une famille de vecteurs propres).

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

La famille de fonctions $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_\lambda(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$$

est libre.

Corollaire 2.3.

1. *Si E est de dimension finie et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u alors*[1]

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k}(u) \leq \dim E}$$

2. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de A alors*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k}(A) \leq n}$$

[1] u (resp. A) a au plus $\dim E$ (resp. n) valeurs propres distinctes.

Plan

1 Compléments d'algèbre linéaire

2 Sous-espaces stables, éléments propres

3 Polynôme caractéristique

4 Diagonalisabilité

5 Trigonalisabilité

6 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 3.1 (polynôme caractéristique).

1. Le ***polynôme caractéristique*** de A, noté χ_A, est donné par

$$\boxed{\chi_A(X) = \det\big(X\mathrm{I}_n - A\big)}.$$

2. Le ***polynôme caractéristique*** de u, noté χ_u, est donné par[1]

$$\boxed{\chi_u(X) = \det\big(X\mathrm{Id}_E - u\big)}.$$

[1] χ_u est le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u.

Théorème 3.1 (expression du polynôme caractéristique).

1. χ_A *est un polynôme unitaire de degré* n *vérifiant*

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{Tr}\,(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)}.$$

2. χ_u *est un polynôme unitaire de degré* $n = \dim E$ *vérifiant*

$$\boxed{\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}\,(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)}.$$

😊 Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A)$.

Théorème 3.2 (polynôme caractéristique et valeurs propres).

1. $\boxed{\mathrm{Sp}\,(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda \textit{ racine de } \chi_u\right\}}$.
2. $\boxed{\mathrm{Sp}\,(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{K},\quad \lambda \textit{ racine de } \chi_A\right\}}$.

1. Si E est un $\mathbb{C}$-ev, alors u a au moins une valeur propre complexe.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A a au moins une valeur propre complexe.

Proposition 3.1 (valeurs propres d'une matrice réelle).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres complexes de A sont deux à deux conjuguées. De plus

$$\boxed{X \in E_\lambda(A) \iff \overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\overline{\lambda}}(A)}.$$

Proposition 3.2 (changement de corps).

Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{L}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)}.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On a :

$$\chi_{R_\theta} = (X-1)(X^2 - 2\cos\theta X + 1)$$

donc $\chi_{R_\theta} = (X-1)(X - \mathrm{e}^{i\theta})(X - \mathrm{e}^{-i\theta})$ et

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \{1, \mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta}\}, \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(R_\theta) = \{1\}.$$

Proposition 3.3 (polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit).

Soit F un sous-espace de E stable par u. Alors χ_{u_F} divise χ_u. En particulier,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u)}.$$

Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 3.2 (ordre de multiplicité).

On appelle ***ordre de multiplicité*** d'une valeur propre λ de u (resp. de A), son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u (resp. de χ_A). On la note $m_\lambda(u)$ (resp. $m_\lambda(A)$).

Proposition 3.4 (somme des ordres de multiplicité).

1. *En général, on a :*

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E}$$

avec égalité si, et seulement si, χ_u *est* ***scindé*** *sur* $\mathbb{K}$*.*

2. *En général, on a :*

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} m_\lambda(A) \leq n}$$

avec égalité si, et seulement si, χ_A *est* ***scindé*** *sur* $\mathbb{K}$*.*

!

1. Si E est un $\mathbb{C}$-ev, alors u admet exactement $\dim E$ valeurs propres comptées avec multiplicité.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors A admet exactement n valeurs propres comptées avec multiplicité.

Proposition 3.5 (encadrement de la dimension d'un espace propre).

1. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,
$$\boxed{1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)}.$$
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$,
$$\boxed{1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)}.$$

Corollaire 3.1 (cas d'une valeur propre simple).

Si λ *est une valeur propre simple, alors le sous-espace propre associé est de dimension* 1.

Proposition 3.6 (somme et produit des valeurs propres).

1. *Si* χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$, *alors*

$$\boxed{\operatorname{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda(u).\lambda \quad \textit{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}}$$

2. *Si* χ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$, *alors*

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} m_\lambda(A).\lambda \quad \textit{et} \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}}$$

La trace et le déterminant d'une matrice ***réelle*** sont la somme et le produit de ses valeurs propres ***complexes*** comptées avec multiplicité.

Plan

1 Compléments d'algèbre linéaire

2 Sous-espaces stables, éléments propres

3 Polynôme caractéristique

4 Diagonalisabilité

5 Trigonalisabilité

6 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Diagonalisabilité

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 4.1 (endomorphisme et matrice diagonalisable).

1. On dit que u est ***diagonalisable*** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale[1].
2. On dit que A est ***diagonalisable***[2] s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

[1] La base $\mathcal{B}$ est appelée ***base de diagonalisation*** de u.
[2] A est diagonalisable si, et seulement si, u_A est diagonalisable.

Proposition 4.1.

Une base de diagonalisation de u est une base de E formée de vecteurs propres de u.

Toute homothétie est diagonalisable et n'importe quelle base de E est une base de diagonalisation.

Théorème 4.1 (condition suffisante de diagonalisabilité).

*Si χ_u (resp. χ_A) est scindé à racines **simples**, alors[1] u (resp. A) est diagonalisable et les sous-espaces propres de u (resp. de A) sont tous des droites vectorielles.*

[1] La réciproque est fausse : $A = \mathrm{diag}(1, 1, 2)$ est diagonalisable car diagonale pourtant A admet deux valeurs propres distinctes.

Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux deux à deux distincts est assurément diagonalisable.

Théorème 4.2 (CNS de diagonalisabilité).

On a équivalence entre :

1. u *diagonalisable sur* $\mathbb{K}$;
2. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} E_\lambda(u)$;
3. $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \dim E_\lambda(u)$;
4. χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et* $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ *pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$.

Théorème 4.3 (CNS de diagonalisabilité).

On a équivalence entre :

1. A *diagonalisable sur* $\mathbb{K}$;
2. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} E_\lambda(A)$;
3. $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)} \dim E_\lambda(A)$;
4. χ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *et* $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$ *pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(X\mathrm{I}_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-1 & X \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 \\ C_2 \longleftarrow C_2 + C_3 \end{matrix} \\
&= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\
&= (X-1)^2 (X-2).
\end{aligned}$$

(développement suivant la première colonne).

Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. Cherchons les sous-espaces propres.

$$
\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \quad & \iff \quad AX = X \\
& \iff \quad \begin{cases} 2x - y + z = x \\ -x + 2y - z = y \\ -x + y \phantom{{}-z} = z \end{cases} \\
& \iff \quad x - y + z = 0.
\end{aligned}
$$

Donc $X = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par suite,

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \dim E_1(A) = 2 = m_1(A).$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff AX = 2X$$

$$\iff \begin{cases} 2x - \ \ y + z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ -x + \ \ y \qquad = 2z \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} \qquad y = z \\ x \qquad = -z \end{cases}$$

Donc $X = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par suite,

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \dim E_2(A) = 1 = m_2(A).$$

D'où A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plan

1 Compléments d'algèbre linéaire

2 Sous-espaces stables, éléments propres

3 Polynôme caractéristique

4 Diagonalisabilité

5 Trigonalisabilité

6 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Endomorphismes et matrices trigonalisables

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 5.1 (endomorphisme et matrice trigonalisable).

1. On dit que u est ***trigonalisable*** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure[1].
2. On dit que A est[2] ***trigonalisable*** s'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

[1] La base $\mathcal{B}$ est appelée ***base de trigonalisation*** de u.
[2] A est trigonalisable si, et seulement si, u_A est trigonalisable.

Géométriquement, u est trigonalisable si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i)$ est stable par u.

Proposition 5.1 (premier vecteur d'une base de trigonalisation).

Le premier vecteur d'une base de trigonalisation de u est un vecteur propre de u.

Théorème 5.1 (CNS de trigonalisabilité).

u (resp. A) est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, χ_u (resp. χ_A) est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 5.1 (trigonalisabilité sur $\mathbb{C}$).

1. *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.*
2. *Toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable.*

Corollaire 5.2 (trigonalisabilité de l'endomorphisme induit).

Soit F un sous-espace de E stable par u. Si u est trigonalisable alors l'endomorphisme induit u_F l'est aussi.

Nilpotence

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 5.2 (endomorphisme nilpotent, matrice nilpotente).

On dit que u est ***nilpotent*** (resp. A est ***nilpotente***) s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $A^k = \mathrm{O}_n$).
Le ***plus petit*** $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $A^k = \mathrm{O}_n$) est appelé ***l'indice de nilpotence de*** u (resp. de A).

😄 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $u(P) = P'$. On a

$$\begin{cases} P \in \mathbb{K}_n[X], \quad u^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0 \\ \\ u^n(X^n) = (X^n)^{(n)} = n! \neq 0 \end{cases}$$

donc u est nilpotent d'indice $n+1$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u. On a $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x_0 \in E$ non nul tel que

$$u^{p-1}(x_0) \neq 0_E \text{ et } u^p(x_0) = 0_E.$$

La famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.

Proposition 5.2 (majoration de l'indice de nilpotence).

Si u est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p \leq n$. De plus, $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème 5.2 (trigonalisation des endomorphismes nilpotents).

1. *u est nilpotent si, et seulement si, u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}\,(u) = \{0\}$.*
2. *A est nilpotente si, et seulement si, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $u(P) = P'$.
La matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, \ldots, X^n\right)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ est

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Plan

1. Compléments d'algèbre linéaire
2. Sous-espaces stables, éléments propres
3. Polynôme caractéristique
4. Diagonalisabilité
5. Trigonalisabilité
6. Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Généralités

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On note :

$$\begin{cases} u^0 = \mathrm{Id}_E, \quad u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \\ \\ A^0 = \mathrm{I}_n, \quad A^{k+1} = A^k.A = A.A^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

- Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(u)$ de E par

$$\boxed{P(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)}.$$

- Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit la matrice $P(A)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\boxed{P(A) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

- On note

$$\boxed{\mathbb{K}[u] \overset{\text{déf}}{=} \left\{P(u),\ \ P \in \mathbb{K}[X]\right\}}$$

l'ensemble des polynômes en u.

- On note

$$\boxed{\mathbb{K}[A] \overset{\text{déf}}{=} \left\{P(A),\ \ P \in \mathbb{K}[X]\right\}}$$

l'ensemble des polynômes en A.

Théorème 6.1 (morphisme $P \longmapsto P(u)$).

L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. En particulier

$$\boxed{\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{K}[X]\right)^2,\ \ \left(P.Q\right)(u) = P(u) \circ Q(u)}.$$

- $\operatorname{Im} \varphi_u = \mathbb{K}[u]$ *est une sous-algèbre* ***commutative*** *de $\mathcal{L}(E)$, appelée* ***l'algèbre engendrée par*** u.
- $\ker \varphi_u = \left\{P \in \mathbb{K}[X],\ \ P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\right\}$ *est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé* ***l'idéal annulateur de*** u.

Corollaire 6.1 (morphisme $P \longmapsto P(A)$).

L'application $\varphi_A : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_A(P) = P(A)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. En particulier

$$\boxed{\forall (P,Q) \in \left(\mathbb{K}[X]\right)^2,\ \ (P.Q)(A) = P(A).Q(A)}.$$

- $\operatorname{Im} \varphi_A = \mathbb{K}[A]$ *est une sous-algèbre* ***commutative*** *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, appelée* ***l'algèbre engendrée par*** A.
- $\ker \varphi_A = \left\{P \in \mathbb{K}[X],\ \ P(A) = 0_n\right\}$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *appelé* ***l'idéal annulateur de*** A.

Définition 6.1 (polynôme annulateur).

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un ***polynôme annulateur*** de u (resp. de A) si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(A) = \mathrm{O}_n$).

1. $X - \lambda$ est annulateur des homothéties de rapport λ.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ est annulateur de $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Proposition 6.1 (polynôme annulateur et valeurs propres).

1. *Soient* $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$.
   1. *Si* $u(x) = \lambda.x$ *alors* $P(u)(x) = P(\lambda).x$.
   2. *En particulier, si* P *est annulateur de* u, *alors*[1] *toute valeur propre de* u *est racine de* P.
2. *Soient* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$.
   1. *Si* $AX = \lambda X$ *alors* $P(A).X = P(\lambda).X$.
   2. *En particulier, si* P *est annulateur de* A, *alors toute valeur propre de* A *est racine de* P.

---

[1] La réciproque est fausse : $X^2 - X$ est annulateur de Id_E, alors que 0 n'est pas valeur propre de Id_E.

Polynômes annulateurs en dimension finie

Ici E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 6.2 (existence de polynôme annulateur en dimension finie).

En dimension finie, tout endomorphisme[1] admet au moins un polynôme annulateur non nul[2].

[1] En dimension infinie, il existe des endomorphismes qui n'admettent pas de polynôme annulateur non nul : $u : P \longmapsto P'$.

[2] De même, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Théorème 6.3 (Cayley-Hamilton).

1. χ_u *est annulateur de* u : $\boxed{\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.
2. χ_A *est annulateur de* A : $\boxed{\chi_A(A) = \mathrm{O}_n}$.

Théorème 6.4 (polynôme minimal d'un endomorphisme).

Il existe un ***unique*** *polynôme* $\prod_u$ *vérifiant :*

1. $\prod_u$ *est annulateur de* u.
2. $\prod_u$ *est unitaire.*
3. $\prod_u$ *divise tout polynôme annulateur de* u.

$\prod_u$ *est appelé le* ***polynôme minimal*** *de* u.

Théorème 6.5 (polynôme minimal d'une matrice carrée).

*Il existe un **unique** polynôme $\prod_A$ vérifiant :*

1. $\prod_A$ *est annulateur de* A.
2. $\prod_A$ *est unitaire.*
3. $\prod_A$ *divise tout polynôme annulateur de* A.

$\prod_A$ *est appelé le **polynôme minimal** de* A.

Théorème 6.6 (polynôme minimal et valeurs propres).

1. *Pour l'endomorphisme* u : $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \left\{\lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda \text{ racine de } \prod_u\right\}}$.
2. *Pour la matrice* A : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{K},\ \ \lambda \text{ racine de } \prod_A\right\}}$.

$\prod_u$ et χ_u ont exactement les mêmes facteurs irréductibles.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$ et $\prod_A$ divise χ_A, alors

$$\prod_A = (X-2)(X-3) \quad \text{ou} \quad \prod_A = (X-2)^2(X-3).$$

Comme $(A - 2\mathrm{I}_3)(A - 3\mathrm{I}_3) = \mathrm{O}_3$, alors $\prod_A = (X-2)(X-3)$.

Théorème 6.7 (base de $\mathbb{K}[u]$ en dimension finie).

1. *Soit* $d = \deg \prod_u$. *La famille* $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ *est une base de* $\mathbb{K}[u]$. *En particulier,*

$$\boxed{\dim \mathbb{K}[u] = \deg \prod_u}.$$

2. *Soit* $d = \deg \prod_A$. *La famille* $\left(A^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ *est une base de* $\mathbb{K}[A]$. *En particulier,*

$$\boxed{\dim \mathbb{K}[A] = \deg \prod_A}.$$

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 6.8 (décomposition des noyaux).

Ici E de dimension quelconque (finie ou infinie). Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux de produit égal à P. On a :

$$\boxed{\ker\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\big(P_i(u)\big)}.$$

On a de même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\ker\big(P(A)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\big(P_i(A)\big)$.

Pour un projecteur u de E, le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de u, donc $E = \ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker u$.

Théorème 6.9 (CNS de diagonalisabilité).

1. *On a équivalence entre :*
   1. *u est diagonalisable;*
   2. *u annule un polynôme scindé à racines simples;*
   3. *$\prod_u$ est scindé à racines simples.*
2. *On a équivalence entre :*
   1. *A est diagonalisable;*
   2. *A annule un polynôme scindé à racines simples;*
   3. *$\prod_A$ est scindé à racines simples.*

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = M^\top$. On a $u^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, donc X^2-1 annule u. Puisque X^2-1 est scindé à racines simples, u est diagonalisable.

Corollaire 6.2 (diagonalisabilité de l'endomorphisme induit).

Si u est diagonalisable et si F est un sous-espace de E stable par u, alors u_F est diagonalisable.

Sans calcul, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car sinon la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ serait diagonalisable ce qui est pas le cas.

Proposition 6.2 (décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable).

Supposons u diagonalisable et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
Soit p_i la projection[1] sur $E_{\lambda_i}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} E_{\lambda_j}(u)$. On a :

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i} \quad \textit{et} \quad \boxed{\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = \sum_{i=1}^{r} P(\lambda_i) p_i}.$$

[1] Les p_i, $1 \leq i \leq r$ sont appelés les ***projecteurs spectraux*** de E associés à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.

Théorème 6.10 (CNS de trigonalisabilité).

1. *On a équivalence entre :*
   1. u *est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$;
   2. u *annule un polynôme scindé sur* $\mathbb{K}$;
   3. $\prod_u$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$.
2. *On a équivalence entre :*
   1. A *est trigonalisable sur* $\mathbb{K}$;
   2. A *annule un polynôme scindé sur* $\mathbb{K}$;
   3. $\prod_A$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$.

😊

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)B$.
On a

$$u \circ u(M) = \mathrm{Tr}\,(AB)u(M),$$

donc $u^2 = \mathrm{Tr}\,(AB)u$. Le polynôme $X^2 - \mathrm{Tr}\,(AB)X$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et annulateur de u donc u est trigonalisable.

Sous-espaces caractéristiques

Ici E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 6.2 (sous-espace caractéristique).

Supposons χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$: $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Le sev

$$F_{\lambda_i}(u) \overset{\text{déf}}{=} \ker\big(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\big)^{m_i},\ 1 \leq i \leq r$$

est appelé le ***sous-espace caractéristique*** de u associé à λ_i.

Proposition 6.3 (propriétés des sous-espaces caractéristiques).

1. $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_{\lambda_i}(u)$.
2. $F_{\lambda_i}(u)$ *est stable par* u *et* $\dim F_{\lambda_i}(u) = m_i$.
3. *La restriction de* u *à* $F_{\lambda_i}(u)$ *induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.*

Théorème 6.11 (réduction et sous-espaces caractéristiques (version vectorielle)).

Supposons χ_u *est scindé sur* $\mathbb{K}$. *Il existe une base de* E *dans laquelle la matrice de* u *est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.*

Théorème 6.12 (réduction et sous-espaces caractéristiques (version matricielle)).

Supposons χ_A *est scindé sur* $\mathbb{K}$ *:*

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *deux à deux distincts. Il existe* $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *tel que*

$$A = P.\mathrm{diag}\left(T_1, \dots, T_n\right).P^{-1}.$$

De plus, la matrice $T_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ *est triangulaire supérieure et à termes diagonaux égaux.*

Merci pour votre attention!