

# Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

## Sommaire

|   |                                                   |    |
|---|---------------------------------------------------|----|
| 1 | Compléments d'algèbre linéaire                    | 1  |
| 2 | Sous-espaces stables, éléments propres            | 5  |
| 3 | Polynôme caractéristique                          | 7  |
| 4 | Diagonalisabilité                                 | 9  |
| 5 | Trigonalisabilité                                 | 10 |
| 6 | Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées | 11 |

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

## 1 Compléments d'algèbre linéaire

### Somme de sous-espaces vectoriels

#### Définition 1.1.

#### somme et somme directe d'une famille finie de sev

1. On appelle **somme** des sev  $F_1, \dots, F_r$  de  $E$ , l'ensemble notée  $\sum_{i=1}^r F_i$  définie par :

$$\sum_{i=1}^r F_i \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^r x_i \quad \text{où} \quad (x_1, \dots, x_r) \in F_1 \times \dots \times F_r \right\}.$$

2. On dit que les sev  $F_1, \dots, F_r$  de  $E$  sont en **somme directe** et on note  $\sum_{i=1}^r F_i = \bigoplus_{i=1}^r F_i$  si :

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in F_1 \times \dots \times F_r, \quad \sum_{i=1}^r x_i = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad x_i = 0.$$

**Remarque 1.1.** ■  $x \in \bigoplus_{i=1}^r F_i \iff \exists!(x_1, \dots, x_r) \in F_1 \times \dots \times F_r, \quad x = \sum_{i=1}^r x_i$ . (La décomposition dans  $\bigoplus_{i=1}^r F_i$  est unique)

**Proposition 1.1.****somme de sous-espaces et familles de vecteurs**

Soient  $F_1, \dots, F_r$  des sev de  $E$  et  $\mathcal{E}_i$  une famille de vecteurs de  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

1. Si, chaque  $\mathcal{E}_i$  est génératrice de  $F_i$ , alors  $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{E}_i$  est génératrice de  $\sum_{i=1}^r F_i$ .
2. Supposons que la somme  $\sum_{i=1}^r F_i$  est directe.
  - Si, chaque  $\mathcal{E}_i$  est libre, alors  $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{E}_i$  est libre dans  $\bigoplus_{i=1}^r F_i$ .
  - Si, chaque  $\mathcal{E}_i$  est une base de  $F_i$ , alors  $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{E}_i$  est une base de  $\bigoplus_{i=1}^r F_i$ .

**Définition 1.2.****base adaptée à une décomposition en somme directe**

Soient  $F_1, \dots, F_r$  des sev de  $E$  de dimension finie et  $\mathcal{B}_i$  une base de  $F_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . La famille  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$  est une base (la réunion étant « ordonnée ») de  $\bigoplus_{i=1}^r F_i$  dite **base adaptée à la décomposition**  $\bigoplus_{i=1}^r F_i$ .

**Proposition 1.2.****caractérisation d'une somme directe**

Soient  $F_1, \dots, F_r$  des sev de  $E$ . La somme  $\sum_{i=1}^r F_i$  est directe<sup>1</sup> si, et seulement si,  $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $F_j \cap \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r F_i \right) = \{0_E\}$ .

1. Lorsque  $r \geq 3$ , on peut avoir  $\bigcap_{i=1}^r F_i = \{0\}$  ou  $F_i \cap F_j = \{0\}$  pour tout  $i \neq j$  sans que la somme  $\sum_{i=1}^r F_i$  soit directe.

**Théorème 1.1.****caractérisation des sommes directes en dimension finie**

Soient  $F_1, \dots, F_r$  des sev de dimension finie. On a  $\dim \left( \sum_{i=1}^r F_i \right) \leq \sum_{i=1}^r \dim F_i$ , avec égalité si, et seulement si, la somme est **directe**.

**Définition 1.3.****sev supplémentaires**

On dit que les sev  $F_1, \dots, F_r$  de  $E$  sont **supplémentaires dans**  $E$  lorsque  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ .

**Remarque 1.2** (Cas de la somme de deux sev : rappel MPSI).

- $E = F_1 \oplus F_2 \iff \forall x \in E, \exists ! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2 \iff \begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0\} \end{cases}$ .
- Supposons  $E$  de dimension finie et soient  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}_2$ ) une base de  $F_1$  (resp. de  $F_2$ ). On a :
 
$$E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{cases} E = F_1 + F_2 \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases} \iff \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \end{cases} \iff \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ base de } E.$$

**Proposition 1.3.****projecteurs associés à une décomposition de l'espace**

Soit  $F_1, \dots, F_r$  des sev de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ . Posons, pour  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $E_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r F_i$ .

1. Pour tout  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $E = F_j \oplus E_j$ .
2. Si  $p_j$  est la projection sur  $F_j$  parallèlement à  $E_j$ , on a :
 
$$\begin{cases} p_i \circ p_j = 0 & \text{pour tout } i \neq j \\ p_i \circ p_i = p_i & \text{pour tout } i \in \llbracket 1, r \rrbracket \\ \sum_{i=1}^r p_i = \text{Id}_E \end{cases}$$

Les  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  sont appelés les **projecteurs associés** à la somme directe  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ .

**Théorème 1.2.****somme directe d'applications linéaires**

Soient  $F_1, \dots, F_r$  des sev de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $u_i \in \mathcal{L}(F_i, F)$ . Alors il existe une et une seule application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{F_i} = u_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**Exemple 1.1.** ■ Si  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ , alors  $\text{Id}_E$  est l'unique application linéaire de  $E$  dans  $E$  dont la restriction à chaque  $F_i$  est  $p_i$ .

**Matrices définies par blocs**

Soient :

- $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $(n_1, \dots, n_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ ,  $(p_1, \dots, p_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$  tels que  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  et  $\sum_{j=1}^s p_j = p$ .
- $(n', p') \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $(n'_1, \dots, n'_{r'}) \in (\mathbb{N}^*)^{r'}$ ,  $(p'_1, \dots, p'_{s'}) \in (\mathbb{N}^*)^{s'}$  tels que  $\sum_{i=1}^{r'} n'_i = n'$  et  $\sum_{j=1}^{s'} p'_j = p'$ .

**Définition 1.4.****matrice par blocs**

1. Une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est **écrite par blocs** lorsque  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,s} \end{pmatrix}$

avec  $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket$ .

2. Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **écrite par blocs** lorsque  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,r} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,r} \end{pmatrix}$

avec

- $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ .
- Les **blocs diagonaux**  $A_{i,i}$  sont des matrices **carrées** :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_{i,i} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ .

**Remarque 1.3** (Interprétation géométrique des blocs).

■ Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , on peut considérer que  $A$  représente une application linéaire de  $E$  (espace de dimension  $p$ ) dans  $F$  (espace de dimension  $n$ ) relativement à deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  adaptées à deux décompositions en somme directe  $E = \bigoplus_{j=1}^p E_j$  et  $F = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ .

**Proposition 1.4.****combinaison linéaire**

Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  décomposées en blocs :

$$A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} \text{ et } B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} \text{ où } A_{i,j}, B_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K}) \text{ (même découpage)}.$$

Alors  $\lambda.A + B$  admet la décomposition par blocs (avec même découpage) :  $\lambda.A + B = (\lambda.A_{i,j} + B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ .

**Proposition 1.5.****produit par blocs**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  décomposées en blocs :

$$A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} \text{ et } B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r' \\ 1 \leq j \leq s'}} \text{ où } r' = s \text{ et } (n'_1, \dots, n'_{r'}) = (p_1, \dots, p_s).$$

Alors  $AB$  admet la décomposition en blocs :  $AB = (C_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r' \\ 1 \leq j \leq s'}}$  avec  $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{r'} A_{i,k} B_{k,j}$ .

**Exemple 1.2.** ■ Soient  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ ,  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- $\begin{pmatrix} a & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ C_1 \end{pmatrix} = (ab + LC_1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ . (scalaire)
- $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_1 + BC_2 \\ CC_1 + DC_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{K})$ .
- $\begin{pmatrix} b \\ C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba & bL \\ aC_1 & C_1L \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ .

**Proposition 1.6.**

**transposition par blocs**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  décomposée en blocs :  $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ . Alors

$$A^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,s} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,s} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A_{1,1}^\top & A_{2,1}^\top & \dots & A_{r,1}^\top \\ A_{1,2}^\top & A_{2,2}^\top & \dots & A_{r,2}^\top \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1,s}^\top & A_{2,s}^\top & \dots & A_{r,s}^\top \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

**Proposition 1.7.**

**matrice triangulaire par blocs**

Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **triangulaire supérieure par blocs** lorsque<sup>1</sup>  $A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$

où les blocs diagonaux  $A_i$  sont des matrices **carrées** :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ . De plus :

1.  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & \star' & \dots & \star' \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star' \\ 0 & \dots & 0 & A_r^k \end{pmatrix}$ .
2.  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_i \in \mathcal{GL}_{n_i}(\mathbb{K})$ .
3. Si  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & A_r^{-1} \end{pmatrix}$ .
4.  $\det A = \prod_{i=1}^r \det A_i$ .

1. Définition analogue pour une **triangulaire inférieure par blocs**.

**Proposition 1.8.**

**matrice diagonale par blocs**

Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **diagonale par blocs** lorsque  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$  et on note

$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$  où les blocs diagonaux  $A_i$  sont des matrices **carrées** :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ . De plus :

1.  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k)$ .
2.  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $A_i \in \mathcal{GL}_{n_i}(\mathbb{K})$ .
3.  $\det A = \prod_{i=1}^r \det A_i$ .
4. Si  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_r^{-1})$ .

**Définition 1.5.****transvections par blocs**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  décomposée par blocs :  $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}}$ .

1. Soit  $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . Pour toute  $M \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}$ , l'opération, codée  $L_i \leftarrow L_i + ML_j$ , est valide et appelée une **transvection par blocs sur les lignes**.
2. Soit  $(i,j) \in \llbracket 1, s \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$ . Pour toute  $M \in \mathcal{M}_{p_j, p_i}$ , l'opération, codée  $C_i \leftarrow C_i + C_j M$ , est valide et appelée une **transvection par blocs sur les colonnes**.

**Remarque 1.4** (Invariance du déterminant par des transvections par blocs).

■ Comme les transvections par blocs sont en fait des transvections simultanées sur les lignes ou sur les colonnes, lorsqu'elles portent sur une matrice carrée, **les transvections par blocs conservent le déterminant** de cette matrice carrée.

**Exemple 1.3.** ■ Soient  $A \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n_1, n_2}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n_2, n_1}(\mathbb{K})$ .

En appliquant l'opération  $L_1 \leftarrow L_1 - BL_2$ , on passe de  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & I_{n_2} \end{pmatrix}$  à  $\begin{pmatrix} A - BC & O_{n_1, n_2} \\ C & I_{n_2} \end{pmatrix}$  et donc

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & I_{n_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - BC & O_{n_1, n_2} \\ C & I_{n_2} \end{pmatrix} = \det(A - BC) \det(I_{n_2}) = \det(A - BC).$$

## 2 Sous-espaces stables, éléments propres

### Sous-espaces stables

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ .

**Définition 2.1.****sous-espace stable**

On dit que  $F$  est **stable** par  $u$  si  $\boxed{u(F) \subset F}$  c-à-d :  $\forall x \in F, u(x) \in F$ .

**Proposition 2.1.****opérations**

L'intersection (resp. la somme) de sous-espaces stables par  $u$  est stable par  $u$ .

**Théorème 2.1.****stabilité du noyau et l'image**

Si  $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$  tel que  $uv = vu$ , alors  $\ker u$  et  $\operatorname{Im} u$  sont stables par  $v$ . En particulier,  $\ker u$  et  $\operatorname{Im} u$  sont stables par  $u$ .

**Définition 2.2.****endomorphisme induit**

Lorsque  $F$  est stable par  $u$ , on appelle **endomorphisme induit** par  $u$  sur  $F$  l'endomorphisme  $u_F \in \mathcal{L}(F)$  défini par <sup>1</sup> :  $\boxed{\forall x \in F, u_F(x) = u(x)}$ .

1. On distinguera soigneusement l'endomorphisme induit  $u_F$ , qui est un endomorphisme  $F$  vers  $F$ , de la restriction  $u|_F$  qui est une application linéaire de  $F$  vers  $E$ .

**Proposition 2.2.****opérations**

Soit  $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ . Si  $F$  est stable par  $u$  et  $v$  alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $F$  est stable par  $\lambda u$ ,  $u + v$  et  $u \circ v$ .  
De plus :  $(\lambda u)_F = \lambda u_F$ ,  $(u + v)_F = u_F + v_F$  et  $(u \circ v)_F = u_F \circ v_F$ .

**Remarque 2.1.** ■ L'ensemble  $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(F), u(F) \subset F\}$  des endomorphismes stabilisant  $F$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  et l'application  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(F)$  définie par  $\varphi(u) = u_F$  est un morphisme d'algèbres.

**Théorème 2.2.****version matricielle de la stabilité**

Supposons  $E$  est de dimension finie et soit  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  complétée en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ . On a équivalence entre :

- (i)  $F$  est stable par  $u$  ;
- (ii)  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$  avec  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  où  $p = \dim F$ .

**Corollaire 2.1.****cas d'une décomposition de l'espace**

Supposons  $E$  de dimension finie et  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$  tel que chaque sous-espace  $F_i$  est stable par  $u$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée à cette décomposition. On a équivalence entre :

- (i)  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $F_i$  est stable par  $u$  ;
- (ii)  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$  avec  $A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{F_i}}(u_{F_i}) \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$  où  $\alpha_i = \dim F_i$  pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

**Exemple 2.1.** ■ Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  définie par  $u(M) = M^\top$ . On a  $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

- Les sev  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont stables par  $u$ . De plus  $u_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} = \text{Id}_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$  et  $u_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})} = -\text{Id}_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$ .
- Dans une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la somme directe  $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\text{I}_{n(n+1)}}{2} & O \\ \hline O & -\frac{\text{I}_{n(n-1)}}{2} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R}) \text{ avec } \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Éléments propres**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Définition 2.3.****vecteur propre, valeur propre et sous-espace propre**

1. On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **valeur propre de  $u$**  si :

$$\boxed{\exists x \in E \setminus \{0_E\}, \quad u(x) = \lambda x}.$$

2. On dit que  $x \in E$  est **vecteur propre de  $u$**  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  si :

$$\boxed{x \neq 0_E \text{ et } u(x) = \lambda x}.$$

3. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $u$ , le **sous-espace propre de  $u$**  associé à la valeur propre  $\lambda$  est :

$$\boxed{E_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(\lambda \text{Id}_E - u)}.$$

4. On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **valeur propre de  $A$**  si :

$$\boxed{\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}, \quad AX = \lambda X}.$$

5. On dit que  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est **vecteur propre de  $A$**  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  si :

$$\boxed{X \neq 0 \text{ et } AX = \lambda X}.$$

6. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $A$ , le **sous-espace propre de  $A$**  associé à la valeur propre  $\lambda$  est :

$$\boxed{E_\lambda(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(\lambda \text{I}_n - A)}.$$

**Exemple 2.2.** ■ Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une homothétie de rapport  $\lambda$  alors  $\lambda$  est l'unique valeur propre de  $u$  et  $E_\lambda(u) = E$ .

■ Soit  $u$  l'endomorphisme de dérivation sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Tout réel est valeur propre de  $u$  et, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $E_\lambda(u) = \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t})$ .

**Définition 2.4.****spectre**

1. Si  $E$  de dimension finie, on appelle **spectre de  $u$**  l'ensemble  $\boxed{\text{Sp}(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ valeur propre de } u\}}$ .

2. On appelle **spectre de  $A$**  l'ensemble  $\boxed{\text{Sp}(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}}$ .

**Remarque 2.2.** ■ Si  $E$  est de dimension finie, on a :

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \lambda \text{Id}_E - u \text{ non injectif} \iff \lambda \text{Id}_E - u \notin \mathcal{GL}(E).$$

En particulier :  $0 \in \text{Sp}(u) \iff u \notin \mathcal{GL}(E)$ .

■  $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \ker(\lambda I_n - A) \neq \{0\} \iff \lambda I_n - A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . En particulier :  $0 \in \text{Sp}(A) \iff A \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

■ Soit  $u_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  :

$$\begin{array}{ccc} u_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

Alors les éléments propres de  $A$  sont respectivement les éléments propres de  $u_A$ .

### Propriétés des sous-espaces propres

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### Proposition 2.3.

stabilité

Si  $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$  tel que  $uv = vu$ , alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. En particulier, les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $u$  et  $u_{E_\lambda(u)} = \lambda \text{Id}_{E_\lambda(u)}$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ .

#### Théorème 2.3.

somme directe des sous-espaces propres

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ , alors les sous-espaces propres associés  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$  sont en somme directe.

#### Corollaire 2.2.

liberté d'une famille de vecteurs propres

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

**Exemple 2.3.** ■ La famille de fonctions  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de l'espace  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}, e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$  est libre.

#### Corollaire 2.3.

1. Si  $E$  est de dimension finie et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$  alors<sup>1</sup>
2. Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$  alors

$$\sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}(u) \leq \dim E$$

$$\sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k}(A) \leq n$$

1.  $u$  (resp.  $A$ ) a au plus  $\dim E$  (resp.  $n$ ) valeurs propres distinctes.

## 3 Polynôme caractéristique

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Polynôme caractéristique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Définition 3.1.

polynôme caractéristique

1. Le *polynôme caractéristique* de  $A$ , noté  $\chi_A$ , est donné par  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ .

2. Le *polynôme caractéristique* de  $u$ , noté  $\chi_u$ , est donné par<sup>1</sup>  $\chi_u(X) = \det(X\text{Id}_E - u)$ .

1.  $\chi_u$  est le polynôme caractéristique de toute matrice représentant  $u$ .

**Théorème 3.1.****expression du polynôme caractéristique**

1.  $\chi_A$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  vérifiant  $\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ .
2.  $\chi_u$  est un polynôme unitaire de degré  $n = \dim E$  vérifiant  $\chi_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$ .

**Exemple 3.1.** ■ Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  alors  $\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$ .

**Théorème 3.2.****polynôme caractéristique et valeurs propres**

1.  $\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ racine de } \chi_u\}$ .
2.  $\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ racine de } \chi_A\}$ .

**Remarque 3.1.** ■ Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev, alors  $u$  a au moins une valeur propre complexe.

■ Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $A$  a au moins une valeur propre complexe.

**Proposition 3.1.****valeurs propres d'une matrice réelle**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Les valeurs propres complexes de  $A$  sont deux à deux conjuguées. De plus

$$X \in E_\lambda(A) \iff \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A) \quad \text{et} \quad \dim E_\lambda(A) = \dim E_{\bar{\lambda}}(A).$$

**Proposition 3.2.****changement de corps**

Soit  $\mathbb{L}$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ .  $\text{Sp}_{\mathbb{L}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ .

**Exemple 3.2.** ■ Soit  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$  et  $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . On a :  $\chi_{R_\theta} = (X-1)(X^2 - 2\cos \theta X + 1)$  donc  $\chi_{R_\theta} = (X-1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(R_\theta) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ ,  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R_\theta) = \{1\}$ .

**Proposition 3.3.****polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit**

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$ . En particulier,  $\text{Sp}(u_F) \subset \text{Sp}(u)$ .

**Ordre de multiplicité d'une valeur propre**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 3.2.****ordre de multiplicité**

On appelle **ordre de multiplicité** d'une valeur propre  $\lambda$  de  $u$  (resp. de  $A$ ), son ordre de multiplicité en tant que racine de  $\chi_u$  (resp. de  $\chi_A$ ). On la note  $m_\lambda(u)$  (resp.  $m_\lambda(A)$ ).

**Proposition 3.4.****somme des ordres de multiplicité**

1. En général, on a :  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$   
avec égalité si, et seulement si,  $\chi_u$  est **scindé** sur  $\mathbb{K}$ .
2. En général, on a :  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \leq n$   
avec égalité si, et seulement si,  $\chi_A$  est **scindé** sur  $\mathbb{K}$ .

**Remarque 3.2.** ■ Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev, alors  $u$  admet exactement  $\dim E$  valeurs propres comptées avec multiplicité.

■ Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A$  admet exactement  $n$  valeurs propres comptées avec multiplicité.

**Proposition 3.5.****encadrement de la dimension d'un espace propre**

1.  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$ .
2.  $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), 1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)$ .



**Corollaire 3.1.****cas d'une valeur propre simple**

Si  $\lambda$  est une valeur propre simple, alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

**Proposition 3.6.****somme et produit des valeurs propres**

1. Si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors

$$\text{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u) \cdot \lambda \text{ et } \det(u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}$$

2. Si  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors

$$\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \cdot \lambda \text{ et } \det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$$

**Remarque 3.3.** ■ La trace et le déterminant d'une matrice *réelle* sont la somme et le produit de ses valeurs propres *complexes* comptées avec multiplicité.

## 4 Diagonalisabilité

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 4.1.****endomorphisme et matrice diagonalisable**

- On dit que  $u$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale<sup>1</sup>.
- On dit que  $A$  est **diagonalisable**<sup>2</sup> s'il existe  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .
  - La base  $\mathcal{B}$  est appelée **base de diagonalisation** de  $u$ .
  - $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $u_A$  est diagonalisable.

**Proposition 4.1.**

Une base de diagonalisation de  $u$  est une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

**Exemple 4.1.** ■ Toute homothétie est diagonalisable et n'importe quelle base de  $E$  est une base de diagonalisation.

**Théorème 4.1.****condition suffisante de diagonalisabilité**

Si  $\chi_u$  (resp.  $\chi_A$ ) est scindé à racines **simples**, alors<sup>1</sup>  $u$  (resp.  $A$ ) est diagonalisable et les sous-espaces propres de  $u$  (resp. de  $A$ ) sont tous des droites vectorielles.

- La réciproque est fautive :  $A = \text{diag}(1, 1, 2)$  est diagonalisable car diagonale pourtant  $A$  admet deux valeurs propres distinctes.

**Exemple 4.2.** ■ Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux deux à deux distincts est assurément diagonalisable.

**Théorème 4.2.****CNS de diagonalisabilité**

- On a équivalence entre :
  - $u$  diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ;
  - $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  ;
  - $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$  ;
  - $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ .
- On a équivalence entre :
  - $A$  diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ;
  - $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A)$  ;
  - $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$  ;
  - $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ .

**Exemple 4.3.** ■ Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-1 & X \end{vmatrix} \stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2). \text{ (développement suivant la première colonne).} \end{aligned}$$

Donc  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$ . Cherchons les sous-espaces propres.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} 2x - y + z = x \\ -x + 2y - z = y \\ -x + y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = z \end{cases}.$$

Donc  $X = \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Par suite,  $E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $\dim E_1(A) = 2 = m_1(A)$ .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} 2x - y + z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ -x + y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases}.$$

Donc  $X = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Par suite,  $E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $\dim E_2(A) = 1 = m_2(A)$ .

D'où  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 5 Trigonalisabilité

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Endomorphismes et matrices trigonalisables

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

#### Définition 5.1.

#### endomorphisme et matrice trigonalisable

1. On dit que  $u$  est **trigonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est triangulaire supérieure<sup>1</sup>.
2. On dit que  $A$  est<sup>2</sup> **trigonalisable** s'il existe  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  triangulaire supérieure et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PTP^{-1}$ .

1. La base  $\mathcal{B}$  est appelée **base de trigonalisation** de  $u$ .
2.  $A$  est trigonalisable si, et seulement si,  $u_A$  est trigonalisable.

**Remarque 5.1.** ■ Géométriquement,  $u$  est trigonalisable si, et seulement si, il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$  est stable par  $u$ .

**Proposition 5.1.****premier vecteur d'une base de trigonalisation**

Le premier vecteur d'une base de trigonalisation de  $u$  est un vecteur propre de  $u$ .

**Théorème 5.1.****CNS de trigonalisabilité**

$u$  (resp.  $A$ ) est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$  si, et seulement si,  $\chi_u$  (resp.  $\chi_A$ ) est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Corollaire 5.1.****trigonalisabilité sur  $\mathbb{C}$** 

1. Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.
2. Toute matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est trigonalisable.

**Corollaire 5.2.****trigonalisabilité de l'endomorphisme induit**

Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ . Si  $u$  est trigonalisable alors l'endomorphisme induit  $u_F$  l'est aussi.

**Nilpotence**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 5.2.****endomorphisme nilpotent, matrice nilpotente**

On dit que  $u$  est **nilpotent** (resp.  $A$  est **nilpotente**) s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$  (resp.  $A^k = O_n$ ).  
Le **plus petit**  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$  (resp.  $A^k = O_n$ ) est appelé **l'indice de nilpotence de  $u$**  (resp. de  $A$ ).

**Exemple 5.1.** ■ Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  définie par  $u(P) = P'$ .

On a  $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], u^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$  et  $u^n(X^n) = (X^n)^{(n)} = n! \neq 0$  donc  $u$  est nilpotent d'indice  $n+1$ .

**Remarque 5.2.** ■ Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  l'indice de nilpotence de  $u$ . On a  $u^p = 0$  et  $u^{p-1} \neq 0$  donc il existe  $x_0 \in E$  non nul tel que  $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$  et  $u^p(x_0) = 0_E$ . La famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  est libre.

**Proposition 5.2.****majoration de l'indice de nilpotence**

Si  $u$  est nilpotent d'indice  $p \in \mathbb{N}^*$ , alors  $p \leq n$ . De plus,  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Théorème 5.2.****trigonalisation des endomorphismes nilpotents**

1.  $u$  est nilpotent si, et seulement si,  $u$  est trigonalisable et  $\text{Sp}(u) = \{0\}$ .
2.  $A$  est nilpotente si, et seulement si,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

**Exemple 5.2.** ■ Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$  définie par  $u(P) = P'$ .

La matrice de  $u$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  est  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

**6 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées****Généralités**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On note  $u^0 = \text{Id}_E$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k$  et  $A^0 = I_n$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A^k$ .
- Si  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on définit l'endomorphisme  $P(u)$  de  $E$  par  $P(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^p a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$ .

- Si  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on définit la matrice  $P(A)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par  $P(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^p a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- On note  $\mathbb{K}[u] \stackrel{\text{déf}}{=} \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$  l'ensemble des polynômes en  $u$ .
- On note  $\mathbb{K}[A] \stackrel{\text{déf}}{=} \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$  l'ensemble des polynômes en  $A$ .

**Théorème 6.1.****morphisme**  $P \mapsto P(u)$ 

L'application  $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par  $\varphi_u(P) = P(u)$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres. En particulier

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad (P.Q)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

- $\text{Im } \varphi_u = \mathbb{K}[u]$  est une sous-algèbre **commutative** de  $\mathcal{L}(E)$ , appelée **l'algèbre engendrée par  $u$** .
- $\ker \varphi_u = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  appelé **l'idéal annulateur de  $u$** .

**Corollaire 6.1.****morphisme**  $P \mapsto P(A)$ 

L'application  $\varphi_A : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $\varphi_A(P) = P(A)$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres. En particulier

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \quad (P.Q)(A) = P(A).Q(A).$$

- $\text{Im } \varphi_A = \mathbb{K}[A]$  est une sous-algèbre **commutative** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , appelée **l'algèbre engendrée par  $A$** .
- $\ker \varphi_A = \{P \in \mathbb{K}[X], P(A) = O_n\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  appelé **l'idéal annulateur de  $A$** .

**Définition 6.1.****polynôme annulateur**

On dit que  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un **polynôme annulateur** de  $u$  (resp. de  $A$ ) si  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  (resp.  $P(A) = O_n$ ).

**Exemple 6.1.** ■  $X - \lambda$  est annulateur des homothéties de rapport  $\lambda$ .

■  $\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$  est annulateur de  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

**Proposition 6.1.****polynôme annulateur et valeurs propres**

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1.</b> Soient <math>x \in E</math>, <math>\lambda \in \mathbb{K}</math> et <math>P \in \mathbb{K}[X]</math>.</p> <p><b>a.</b> Si <math>u(x) = \lambda.x</math> alors <math>P(u)(x) = P(\lambda).x</math>.</p> <p><b>b.</b> En particulier, si <math>P</math> est annulateur de <math>u</math>, alors <sup>1</sup> toute valeur propre de <math>u</math> est racine de <math>P</math>.</p> | <p><b>2.</b> Soient <math>X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})</math>, <math>\lambda \in \mathbb{K}</math> et <math>P \in \mathbb{K}[X]</math>.</p> <p><b>a.</b> Si <math>AX = \lambda X</math> alors <math>P(A).X = P(\lambda).X</math>.</p> <p><b>b.</b> En particulier, si <math>P</math> est annulateur de <math>A</math>, alors toute valeur propre de <math>A</math> est racine de <math>P</math>.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
1. La réciproque est fautive :  $X^2 - X$  est annulateur de  $\text{Id}_E$ , alors que 0 n'est pas valeur propre de  $\text{Id}_E$ .

**Polynômes annulateurs en dimension finie**

Ici  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Théorème 6.2.****existence de polynôme annulateur en dimension finie**

En dimension finie, tout endomorphisme <sup>1</sup> admet au moins un polynôme annulateur non nul <sup>2</sup>.

1. En dimension infinie, il existe des endomorphismes qui n'admettent pas de polynôme annulateur non nul :  $u : P \mapsto P'$ .
2. De même, toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède au moins un polynôme annulateur non nul.

**Théorème 6.3.****Cayley-Hamilton**

- |                                                                                                                      |                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1.</b> <math>\chi_u</math> est annulateur de <math>u</math> : <math>\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}</math>.</p> | <p><b>2.</b> <math>\chi_A</math> est annulateur de <math>A</math> : <math>\chi_A(A) = O_n</math>.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Théorème 6.4.****polynôme minimal**

1. Il existe un **unique** polynôme  $\Pi_u$  vérifiant :

- a.  $\Pi_u$  est annulateur de  $u$ .
  - b.  $\Pi_u$  est unitaire.
  - c.  $\Pi_u$  divise tout polynôme annulateur de  $u$ .
- $\Pi_u$  est appelé le **polynôme minimal** de  $u$ .

2. Il existe un **unique** polynôme  $\Pi_A$  vérifiant :

- a.  $\Pi_A$  est annulateur de  $A$ .
  - b.  $\Pi_A$  est unitaire.
  - c.  $\Pi_A$  divise tout polynôme annulateur de  $A$ .
- $\Pi_A$  est appelé le **polynôme minimal** de  $A$ .

**Théorème 6.5.****polynôme minimal et valeurs propres**

1.  $\text{Sp}(u) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ racine de } \Pi_u \right\}.$

2.  $\text{Sp}(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ racine de } \Pi_A \right\}.$

**Remarque 6.1.** ■  $\Pi_u$  et  $\chi_u$  ont exactement les mêmes facteurs irréductibles.

**Exemple 6.2.** ■ Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On a  $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$  et  $\Pi_A$  divise  $\chi_A$ , alors  $\Pi_A = (X-2)(X-3)$  ou  $\Pi_A = (X-2)^2(X-3)$ . Comme  $(A-2I_3)(A-3I_3) = O_3$ , alors  $\Pi_A = (X-2)(X-3)$ .

**Théorème 6.6.****base de  $\mathbb{K}[u]$  en dimension finie**

1. Soit  $d = \deg \Pi_u$ .

a.  $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

b. En particulier,  $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \Pi_u$ .

2. Soit  $d = \deg \Pi_A$ .

a.  $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[A]$ .

b. En particulier,  $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \Pi_A$ .

**Réduction et polynômes annulateurs**

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Théorème 6.7.****décomposition des noyaux**

Soient  $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$  premiers entre eux deux à deux de produit égal à  $P$ . On a<sup>1</sup>

1.  $\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(u)).$

2.  $\ker(P(A)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(A)).$

1. Ici  $E$  de dimension quelconque (finie ou infinie).

**Exemple 6.3.** ■ Pour un projecteur  $u$  de  $E$ , le polynôme  $X^2 - X$  est annulateur de  $u$ , donc  $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker u$ .

**Théorème 6.8.****CNS de diagonalisabilité**

1. On a équivalence entre :

- (i)  $u$  est diagonalisable ;
- (ii)  $u$  annule un polynôme scindé à racines simples ;
- (iii)  $\Pi_u$  est scindé à racines simples.

2. On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est diagonalisable ;
- (ii)  $A$  annule un polynôme scindé à racines simples ;
- (iii)  $\Pi_A$  est scindé à racines simples.

**Exemple 6.4.** ■ Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $u(M) = M^\top$ . On a  $u^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ , donc  $X^2 - 1$  annule  $u$ . Puisque  $X^2 - 1$  est scindé à racines simples,  $u$  est diagonalisable.

**Corollaire 6.2.****diagonalisabilité de l'endomorphisme induit**

Si  $u$  est diagonalisable et si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $u$ , alors  $u_F$  est diagonalisable.

**Exemple 6.5.** ■ Sans calcul, la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas diagonalisable car sinon la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  serait diagonalisable ce qui est pas le cas.

**Proposition 6.2.****décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable**

Supposons  $u$  diagonalisable et soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ . Soit  $p_i$  la projection<sup>1</sup> sur  $E_{\lambda_i}(u)$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r E_{\lambda_j}(u)$ . On a :  $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$  et  $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{i=1}^r P(\lambda_i) p_i$ .

1. Les  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  sont appelés les **projecteurs spectraux** de  $E$  associés à la somme directe  $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$ .

**Théorème 6.9.****CNS de trigonalisabilité**

1. On a équivalence entre :

- (i)  $u$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$ ;
- (ii)  $u$  annule un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$ ;
- (iii)  $\Pi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

2. On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est trigonalisable sur  $\mathbb{K}$ ;
- (ii)  $A$  annule un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$ ;
- (iii)  $\Pi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**Exemple 6.6.** ■ Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On considère l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par  $u(M) = \text{Tr}(AM)B$ . On a  $u \circ u(M) = \text{Tr}(AB)u(M)$ , donc  $u^2 = \text{Tr}(AB)u$ . Le polynôme  $X^2 - \text{Tr}(AB)X$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et annulateur de  $u$  donc  $u$  est trigonalisable.

**Sous-espaces caractéristiques**

Ici  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Définition 6.2.****sous-espace caractéristique**

Supposons  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :  $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$  où les  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

Le sev  $F_{\lambda_i}(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$  est appelé le **sous-espace caractéristique** de  $u$  associé à  $\lambda_i$ .

**Proposition 6.3.****propriétés des sous-espaces caractéristiques**

- 1.  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_{\lambda_i}(u)$ .
- 2.  $F_{\lambda_i}(u)$  est stable par  $u$  et  $\dim F_{\lambda_i}(u) = m_i$ .
- 3. La restriction de  $u$  à  $F_{\lambda_i}(u)$  induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

**Théorème 6.10.****réduction et sous-espaces caractéristiques (version vectorielle)**

Supposons  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.

**Théorème 6.11.****réduction et sous-espaces caractéristiques (version matricielle)**

Supposons  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :  $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$  où les  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

Il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = P \cdot \text{diag}(T_1, \dots, T_n) \cdot P^{-1}$ . De plus, la matrice  $T_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$  est triangulaire supérieure et à termes diagonaux égaux.