

## TD N°3

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (correction)

## 1 Compléments d'algèbre linéaire

**Corrigé de l'exercice 1.** 1. Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  donc  $M = M^\top = -M^\top$  donc  $M = O_n$  c-à-d  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{O_n\}$ .  
Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On écrit

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^\top)}_{=S} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^\top)}_{=A}$$

avec  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  donc  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . D'où  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

2. Soient  $\varphi$  une forme linéaire non nulle sur  $E$  telle que  $H = \ker \varphi$  et  $a \in E \setminus H$ .

- Soit  $x \in H \cap \text{Vect}(a)$  donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $x = \lambda a$  et  $\varphi(x) = 0$ . On a  $0 = \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$  mais,  $\varphi(a) \neq 0$  car  $a \in E \setminus H$  donc  $\lambda = 0$  et par suite  $x = 0_E$  donc  $H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$ .
- Soit  $x \in E$ . On écrit

$$x = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a$$

on a  $\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \in \text{Vect}(a)$  et  $\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(a) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$  donc  $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \cdot a \in H$ .

Ainsi,  $E = H + \text{Vect}(a)$ .

D'où  $E = H \oplus \text{Vect}(a)$  pour tout  $a \in E \setminus H$ .

**Corrigé de l'exercice 2.** Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a  $0 \in F_i$ . Soient  $P, Q \in F_i$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a, pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ ,

$$(P + \lambda Q)(j) = P(j) + \lambda Q(j) = 0$$

donc  $P + \lambda Q \in F_i$ . Ainsi,  $F_i$  est un sev de  $E$ .

Montrons que  $E = F_0 \oplus \dots \oplus F_n$ .

- Soit  $P_i \in F_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  tel que  $\sum_{i=0}^n P_i = 0$ . On a  $P(j) = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$  donc  $P_i$  possède  $n$  racines. Par ailleurs,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 0 = \sum_{i=0}^n P_i(k) = P_i(i) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \underbrace{P_i(k)}_{=0} = P_i(i).$$

Donc  $P_i$  possède  $n+1$  racines et comme  $\deg P_i \leq n$  alors  $P_i = 0$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ . Ainsi, la somme  $\sum_{i=0}^n P_i$  est directe.

- On a  $F_0 \oplus \dots \oplus F_n \subset E$  donc  $\dim F_0 \oplus \dots \oplus F_n \leq \dim E = n+1$ . Par ailleurs, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , le polynôme  $P_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j) \in F_i$

donc  $\dim F_i \geq 1$  et par suite,

$$\dim F_0 \oplus \dots \oplus F_n = \sum_{i=0}^n \dim F_i \geq n+1 = \dim E$$

donc  $\dim F_0 \oplus \dots \oplus F_n = \dim E$ .

D'où  $E = F_0 \oplus \dots \oplus F_n$ .

**Corrigé de l'exercice 3.** Montrons par sur  $k \in \mathbb{N}^*$ , que  $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$ , on a  $M^1 = M = \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & A \end{pmatrix}$ .

*Hérédité* : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$  et montrons  $M^{k+1} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ O_n & A^{k+1} \end{pmatrix}$ . On a

$$M^{k+1} = M^k \cdot M = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A \\ O_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^k \cdot A + kA^k \cdot A \\ O_n & A^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^{k+1} \\ O_n & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

*Conclusion* : Par le principe de récurrence,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$ .

Si  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $M \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{K})$  et  $M^{-1}$  est de la forme  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & B \\ O_n & A^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Par ailleurs, le calcul  $M^{-1}.M = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$  donne  $A^{-1}A + BA = O_n$  donc  $B = -A^{-1}$ . D'où  $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \\ O_n & A^{-1} \end{pmatrix}$ .

**Corrigé de l'exercice 4.** En appliquant l'opération  $C_2 \leftarrow C_2 - C_1B$ , on obtient

$$\det \begin{pmatrix} I_{n_2} & B \\ C & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_{n_2} & O_{n_2, n_1} \\ C & A - CB \end{pmatrix} = \det(I_{n_2}) \det(A - CB) = \det(A - CB).$$

**Corrigé de l'exercice 5.** En appliquant successivement les opérations  $C_2 \leftarrow C_2 + iC_1$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - iL_2$ , on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A & B + iA \\ -B & A - iB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & O_n \\ -B & A - iB \end{vmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A + iB) \det(\overline{A + iB}).$$

Comme l'application déterminant est continue, on obtient  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + iB) \overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$ .

**Corrigé de l'exercice 6.** 1. Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a

$$\begin{aligned} AD = DA &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (AD)_{i,j} = (DA)_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \lambda_j = \lambda_i a_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 0. \quad (\text{car } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j) \end{aligned}$$

donc  $A$  est une matrice diagonale.

2. Soient  $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$  et  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,r} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r,1} & A_{r,2} & \dots & A_{r,r} \end{pmatrix}$  écrite par blocs avec :

- $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$  pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ .
- Les blocs diagonaux  $A_{i,i}$  sont des matrices carrées :  $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, A_{i,i} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ .

Par un calcul par blocs on a :

$$\begin{aligned} AD = DA &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, (AD)_{i,j} = (DA)_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, A_{i,j} \lambda_j = \lambda_i A_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, A_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, i \neq j \implies A_{i,j} = 0. \quad (\text{car } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j) \end{aligned}$$

donc  $A$  est diagonale par blocs de la forme  $A = \text{diag}(A_{1,1}, \dots, A_{r,r}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $A_{i,i} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

## 2 Sous-espaces stables, éléments propres

**Corrigé de l'exercice 7.** Supposons  $F$  stable par  $u$ . Pour tout  $x \in F$ ,  $u(x) \in F$ , en particulier,  $\forall i \in I$ ,  $u(e_i) \in F$ .

Inversement, supposons  $\forall i \in I$ ,  $u(e_i) \in F$ . Soit  $x \in F$  donc  $x = \sum_{\substack{i \in I \\ J \text{ fini} \subset I}} \alpha_i e_i$  avec  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ . On a

$$u(x) = u \left( \sum_{\substack{i \in I \\ J \text{ fini} \subset I}} \alpha_i e_i \right) = \sum_{\substack{i \in I \\ J \text{ fini} \subset I}} \alpha_i \underbrace{u(e_i)}_{\in F} \in F.$$

Donc  $F$  est stable par  $u$ .

**Corrigé de l'exercice 8.**  $\text{Vect}(x)$  est stable par  $u$  si, et seulement si,  $u(x) \in \text{Vect}(x)$  si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$  si, et seulement si,  $x$  est vecteur propre de  $u$ .

**Corrigé de l'exercice 9.** On a  $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = 1$  donc  $\operatorname{Im} u$  est une droite vectorielle. D'après le cours,  $\operatorname{Im} u$  est stable par  $u$  donc  $\operatorname{Im} u$  est engendré par un vecteur propre de  $u$ . Notons  $\lambda$  la valeur propre associée et on a  $\operatorname{Im} u \subset \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$  donc  $(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ u = 0$  c-à-d  $u^2 = \lambda u$ .

**Corrigé de l'exercice 10. 1.** Soit  $x \in E$  non nul. L'ensemble  $\Omega_x = \left\{ k \in \mathbb{N}^*, (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \text{ est libre} \right\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}^*$  (car  $1 \in \Omega_x$  puisque  $x$  est non nul) et majorée (par  $n = \dim E$ ) donc  $\Omega_x$  admet un plus grand élément noté  $p \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi,  $p \in \Omega_x$  et  $p+1 \notin \Omega_x$  c-à-d la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre et la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$  est liée.

**2.** Soit  $y \in F_x$  donc  $y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)$  et on a

$$u(y) = u\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+1}(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k u^k(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u^k(x)}_{\in F_x} + \underbrace{\lambda_p u^p(x)}_{\in F_x} \in F_x$$

$u^p(x) \in F_x$  car la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre et la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), u^p(x))$  est liée. Ainsi,  $u(y) \in F_x$  et par suite,  $F_x$  est stable par  $u$ .

**3.** Soit  $v$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_x$ . Notons  $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  la base de  $F_x$  (elle est libre et génératrice). On écrit  $u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$  et on a  $v(u^{p-1}(x)) = u(u^{p-1}(x)) = u^p(x)$ . Ainsi, la matrice de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}_x$  est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_x}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

**Corrigé de l'exercice 11.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables, il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \operatorname{Sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}, AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}, PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}, BP^{-1}X = \lambda P^{-1}X \\ &\iff \exists Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n,1}\}, BY = \lambda Y \\ &\iff \lambda \in \operatorname{Sp}(B). \end{aligned}$$

Notons que,  $P^{-1}X \neq 0_{n,1} \iff X \neq 0_{n,1}$  car  $P$  est inversible.

Ainsi  $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}(B)$ . Par ailleurs, pour  $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ , l'application  $\Theta_P : \begin{matrix} E_\lambda(A) & \longrightarrow & E_\lambda(B) \\ X & \longmapsto & P^{-1}X \end{matrix}$  est linéaire et bijective.

Par suite,  $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$ .

**Corrigé de l'exercice 12.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  bijectif. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, x = u^{-1}(\lambda x) \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, x = \lambda u^{-1}(x) \\ &\iff \exists x \in E \setminus \{0_E\}, u^{-1}(x) = \lambda^{-1}x \\ &\iff \lambda^{-1} \text{ valeur propre de } u^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si, et seulement si,  $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $u^{-1}$ .

**Corrigé de l'exercice 13. 1.**  $\ker u_F = \{x \in F, u_F(x) = 0\} = \{x \in F, u(x) = 0\} = \{x \in E, u(x) = 0\} \cap F = \ker u \cap F$  et

$$\operatorname{Im} u_F = \{y \in F, \exists x \in F, y = u_F(x)\} = \{y \in F, \exists x \in F, y = u(x)\} = \{y \in E, \exists x \in F, y = u(x)\} \cap F \subset \operatorname{Im} u \cap F.$$

L'inclusion ci-dessus est stricte. En effet : soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$  définie par  $u(P) = P'$  et  $F = \mathbb{K}_n[X]$ . On a

- pour tout  $P \in F$ ,  $u(P) = P' \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset F$ , donc  $F$  est stable par  $u$ .
- $\text{Im } u = \mathbb{K}[X]$  donc  $\text{Im } u \cap F = \mathbb{K}[X] \cap \mathbb{K}_n[X] = \mathbb{K}_n[X]$  et  $\text{Im } u_F = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

Donc l'inclusion est stricte.

2.  $u$  est injectif si, et seulement si,  $\ker u = \{0\}$ . On a  $\ker u_F = \ker u \cap F = \{0\} \cap F = \{0\}$  donc  $u_F$  est injectif.

3. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u_F$ . On a  $E_\lambda(u_F) = \ker(\lambda \text{Id}_F - u_F) = \ker((\lambda \text{Id}_E - u)_F)$ . Or  $F$  est stable par l'endomorphisme  $\lambda \text{Id}_E - u$  donc d'après la première question,

$$\ker((\lambda \text{Id}_E - u)_F) = F \cap \ker(\lambda \text{Id}_E - u) = F \cap E_\lambda(u).$$

Ainsi,  $E_\lambda(u_F) = F \cap E_\lambda(u)$ .

### 3 Polynôme caractéristique

**Corrigé de l'exercice 14.** 1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \det((XI_n - A)^\top) = \det(XI_n - A^\top) = \chi_{A^\top}.$$

D'où  $\chi_A = \chi_{A^\top}$ .

2. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables. Il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PBP^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(XI_n - A) \\ &= \det(XI_n - PBP^{-1}) \\ &= \det(XPP^{-1} - PBP^{-1}) \\ &= \det(P(XI_n - B)P^{-1}) \\ &= \det P \det(XI_n - B) \det P^{-1} \\ &= \det(XI_n - B) \quad \text{car } \det P \det P^{-1} = 1 \\ &= \chi_B. \end{aligned}$$

D'où  $\chi_A = \chi_B$ . La réciproque n'est pas vraie. En effet : considérons, pour  $n \geq 2$ , les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On a  $\chi_A = \chi_B = X^2$  pourtant  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables car elles n'ont pas le même rang.

**Corrigé de l'exercice 15.** Soit  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \chi_{A^{-1}}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A^{-1}) \\ &= \det\left(-\lambda A^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} I_n - A\right)\right) \\ &= \det(-\lambda A^{-1}) \det\left(\frac{1}{\lambda} I_n - A\right) \\ &= \frac{(-\lambda)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

En conclusion,  $\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ .

**Corrigé de l'exercice 16.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ . Notons  $n_i = \dim F_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ . On sait, d'après le cours que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(A_1, \dots, A_r) \quad \text{avec } A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{F_i}}(u_{F_i}) \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K}).$$

Donc  $\chi_u = \det(XI_n - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(\text{diag}(XI_{n_1} - A_1, \dots, XI_{n_r} - A_r)) = \prod_{i=1}^r \det(XI_{n_i} - A_i) = \prod_{i=1}^r \det(X\text{Id}_{F_i} - u_{F_i}) = \prod_{i=1}^r \chi_{u_{F_i}}$ .

**Corrigé de l'exercice 17.** 1. Le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est dans  $\mathbb{R}[X]$ . La décomposition dans  $\mathbb{R}[X]$  de  $\chi_u$  est de la forme

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$$

avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$  et  $b_j, c_j \in \mathbb{R}$  avec  $b_j^2 - 4c_j < 0$  pour tout  $1 \leq j \leq s$ .

On a  $\deg \chi_u = \sum_{i=1}^r \alpha_i + 2 \sum_{j=1}^s \beta_j$ . Or le polynôme  $\chi_u$  est de degré impair, donc nécessairement il existe  $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $\alpha_{i_0} \neq 0$  et par suite,  $\lambda_{i_0}$  est une racine réelle de  $\chi_u$  qui est une valeur propre réelle de  $u$ .

2. Soit  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . On a  $\chi_u = \chi_A$  donc d'après la question précédente,  $A$  a au moins une valeur propre réelle.

**Corrigé de l'exercice 18.** 1. On écrit  $AB = ABAA^{-1}$  donc  $AB$  et  $BA$  sont semblables donc ont même polynôme caractéristique.

2. On a  $\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ O & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA + BA & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}$  et

$$\begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ O & \lambda I_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & AB + \lambda I_n - AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ \lambda A & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

3. on prend le déterminant dans l'égalité précédente, on obtient

$$\det \left( \begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ O & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ O & \lambda I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{vmatrix} = \lambda^n \det(\lambda I_n - BA)$$

et  $\det \left( \begin{pmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ O & \lambda I_n - AB \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} I_n & O \\ A & I_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_n & B \\ O & \lambda I_n - AB \end{vmatrix} = \lambda^n \det(\lambda I_n - AB)$ . Donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda^n \chi_{AB}(\lambda) = \lambda^n \det(\lambda I_n - AB) = \lambda^n \det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda).$$

Ainsi,  $X^n \chi_{AB}(X) = X^n \chi_{BA}(X)$  et par suite,  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

4. On a  $(AB)^p = ABAB \dots AB = A(BA)^{p-1}B$  donc d'après la question précédente,  $\chi_{(AB)^p} = \chi_{BA(BA)^{p-1}} = \chi_{(BA)^p}$ .

**Corrigé de l'exercice 19.**  $\operatorname{rg} u = 1$  donc  $\dim \ker u = \dim E_0(u) = n - 1$  donc 0 est une valeur propre de  $u$  de multiplicité au moins égale à  $n - 1$ . Le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est donc de la forme  $\chi_u = X^{n-1}(X - \alpha)$ .

Or  $\chi_u = X^n - \operatorname{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$  donc nécessairement  $\alpha = \operatorname{Tr}(u)$ . Ainsi,  $\chi_u = X^{n-1}(X - \operatorname{Tr} u)$ .

**Corrigé de l'exercice 20.** 1. Comme  $u$  est une projection vectorielle, on a  $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$  avec  $\operatorname{Im} u = \ker(u - \operatorname{Id}_E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base adaptée à la décomposition  $E = \ker u \oplus \ker(\operatorname{Id}_E - u) = E_0(u) \oplus E_1(u)$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} O_{n-r, n-r} & O_{n-r, r} \\ O_{r, n-r} & I_{r, r} \end{pmatrix} \quad \text{avec } r = \operatorname{rg} u.$$

Donc

$$\chi_u = \det(X \operatorname{Id}_E - u) = \det(X I_n - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} X I_{n-r, n-r} - O_{n-r, n-r} & O_{n-r, r} \\ O_{r, n-r} & X I_{r, r} - I_{r, r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X I_{n-r, n-r} & O_{n-r, r} \\ O_{r, n-r} & (X - 1) I_{r, r} \end{vmatrix} = (X - 1)^r X^{n-r}.$$

2. Comme  $u$  est une symétrie vectorielle, on a  $E = \ker(u - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(u + \operatorname{Id}_E)$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base adaptée à la décomposition  $E = \ker(u - \operatorname{Id}_E) \oplus \ker(u + \operatorname{Id}_E) = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{r, r} & O_{r, n-r} \\ O_{n-r, r} & -I_{n-r, n-r} \end{pmatrix} \quad \text{avec } r = \dim \ker(u - \operatorname{Id}_E).$$

Donc

$$\begin{aligned} \chi_u &= \det(X \operatorname{Id}_E - u) = \det(X I_n - \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) \\ &= \begin{vmatrix} X I_{r, r} - I_{r, r} & O_{r, n-r} \\ O_{n-r, r} & X I_{n-r, n-r} + I_{n-r, n-r} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (X - 1) I_{r, r} & O_{r, n-r} \\ O_{n-r, r} & (X + 1) I_{n-r, n-r} \end{vmatrix} = (X - 1)^r (X + 1)^{n-r}. \end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 21.** On commence par calculer  $\chi_A$ . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & 2 & -2 \\ 3 & X+1 & -3 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 + C_3]{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} X+4 & 0 & -2 \\ X+4 & X-2 & -3 \\ 0 & X-2 & X-1 \end{vmatrix} = (X+4)(X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (X+4)(X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix}.$$

On développe selon la première colonne, on obtient  $\chi_A = X(X+4)(X-2)$ . Donc  $\text{Sp } A = \{0, -4, 2\}$ . Cherchons les sous-espaces propres de  $A$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$X \in E_0(A) \iff AX = O_{3,1} \iff \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -3x - y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\text{donc } E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X \in E_{-4}(A) \iff AX = -4X \iff \begin{cases} -2x - 2y + 2z = -4x \\ -3x - y + 3z = -4y \\ -x + y + z = -4z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\text{donc } E_{-4}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 2x \\ -3x - y + 3z = 2y \\ -x + y + z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\text{donc } E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Corrigé de l'exercice 22.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X-a & -b & \dots & -b \\ -b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \dots & -b & X-a \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= \begin{vmatrix} X-(a+(n-1)b) & -b & \dots & \dots & -b \\ X-(a+(n-1)b) & X-a & -b & \dots & -b \\ \vdots & -b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ X-(a+(n-1)b) & -b & \dots & -b & X-a \end{vmatrix}_{[n]} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n \\ &= \begin{vmatrix} X-(a+(n-1)b) & -b & \dots & -b \\ 0 & X-a+b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & X-a+b \end{vmatrix}_{[n]} \quad L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ pour } 2 \leq i \leq n \\ &= \left( X-(a+(n-1)b) \right) \left( X-(a-b) \right)^{n-1}. \quad (\text{développement suivant la première colonne}) \end{aligned}$$

## Corrigé de l'exercice 23.

$$\begin{aligned}
\chi_{C_P}(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} & X + a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ P(X) & \dots & \dots & a_{n-2} & X + a_{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} \quad C_1 \leftarrow C_1 + X C_2 + X^2 C_3 + \dots + X^{n-1} C_n \\
&= (-1)^{n+1} P(X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ X & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & X & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]} \quad (\text{développement suivant la première ligne}) \\
&= (-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X).
\end{aligned}$$

## 4 Diagonalisabilité

**Corrigé de l'exercice 24.** 1. Supposons  $u$  diagonalisable. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Comme  $\text{Sp } u = \{\lambda\}$  alors  $u(e_i) = \lambda \cdot e_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Ainsi,  $u$  et  $\lambda \cdot \text{Id}_E$  coïncident sur la base  $\mathcal{B}$  donc coïncident partout. D'où  $u = \lambda \cdot \text{Id}_E$ .

Inversement, supposons  $u = \lambda \cdot \text{Id}_E$ . La matrice de  $u$  dans n'importe quelle base de  $E$  est diagonale de la forme  $\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$  donc  $u$  est diagonalisable.

2. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  canoniquement associé à  $A$ . Les éléments propres de  $u$  sont exactement les éléments propres de  $A$ . Ainsi,  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $u$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A = \lambda \cdot \text{Id}_n$ .

**Corrigé de l'exercice 25.** 1.  $A$  est triangulaire supérieure stricte donc  $\text{Sp } A = \{\alpha, \beta\}$ . Comme  $\alpha \neq \beta$  alors  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Si  $\alpha = \beta$  alors  $\text{Sp } A = \{\alpha\}$  donc  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A = \alpha \cdot \text{Id}_2$ . Mais  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \neq \alpha \cdot \text{Id}_2$  et par suite,  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Corrigé de l'exercice 26.** On écrit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $A$  est triangulaire supérieure stricte donc  $\text{Sp } A = \{0\}$ .

Comme  $A$  est non nulle alors  $A$  n'est jamais diagonalisable.

**Corrigé de l'exercice 27.** 1. a. On a  $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\text{Id}_3$ .

b. On a  $P \cdot \frac{1}{4}Q = \text{Id}_3$  donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$ .

2. a. On a  $A \cdot u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = u$  donc  $A \cdot u = u$  c-à-d  $u$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\alpha = 1$ .

b. On a  $A \cdot v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $A \cdot v = 2v$  c-à-d  $v$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\beta = 2$ .

On a  $A.w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $A.w = 2w$  c-à-d  $w$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la même valeur propre  $\beta = 2$ .

c. La famille  $(u, v, w)$  est libre dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  puisque  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det P \neq 0$  donc  $(u, v, w)$  constitue une famille libre

dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ . Par suite,  $A$  est diagonalisable et on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. a. Récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

*Initialisation* : Pour  $n = 0$  et  $n = 1$  la propriété est vraie.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $n$  et montrons le au rang  $n + 1$ . On a

$$A^{n+1} = A^n.A = PD^n P^{-1}.PDP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}.$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^n P^{-1}$ .

b.  $D$  est une matrice diagonale donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} A^n &= PD^n P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 + 2^{n-1} & 1/2 - 2^{n-1} & -1/2 + 2^{n-1} \\ 1 - 2^n & 1 & -1 + 2^n \\ 1/2 - 2^{n-1} & 1/2 - 2^{n-1} & -1/2 + 3.2^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 28.** On commence par calculer  $\chi_A$ . On a

$$\chi_u = \begin{vmatrix} X & -3 & -3 \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{vmatrix} X & -3 & -3 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X & -3 & -3 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} (X-1) \begin{vmatrix} X & 0 & -3 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On développe selon la troisième ligne, on obtient  $\chi_A = X(X-1)(X-2)$ . Le polynôme  $\chi_u$  est scindé à racines simples donc  $u$  est diagonalisable et  $\text{Sp } u = \{0, 1, 2\}$ . Cherchons les sous-espaces propres de  $u$ .

Soit  $x \in E_0(u)$  avec  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ . On écrit  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$x \in E_0(u) \iff AX = O_{3,1} \iff \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -2x_3 \\ x_2 & = -x_3 \end{cases}$$

donc  $x = -2x_3 e_1 - x_3 e_2 + x_3 e_3$  et par suite,  $E_0(u) = \text{Vect}(-2e_1 - e_2 + e_3)$ .

Soit  $x \in E_1(u)$  avec  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ . On écrit  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$x \in E_1(u) \iff AX = X \iff \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 & = x_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 & = x_2 \\ x_1 + 2x_3 & = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = -\frac{4}{3}x_3 \end{cases}$$



donc  $x = -x_3e_1 - \frac{4}{3}x_3e_2 + x_3e_3$  et par suite,  $E_1(u) = \text{Vect}(-3e_1 - 4e_2 + 3e_3)$ .

Soit  $x \in E_2(u)$  avec  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ . On écrit  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$x \in E_2(u) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} 3x_2 + 3x_3 &= 2x_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 &= 2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -x_3 \end{cases}$$

donc  $x = x_2e_2 - x_2e_3$  et par suite,  $E_2(u) = \text{Vect}(e_2 - e_3)$ .

Finalement, la famille  $(-2e_1 - e_2 + e_3, -3e_1 - 4e_2 + 3e_3, e_2 - e_3)$  est une base de diagonalisation de l'endomorphisme  $u$ .

**Corrigé de l'exercice 29.** 1.  $A$  est la matrice du système  $(\Sigma)$  donc  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  de sorte que :  $X_{n+1} = AX_n$ .

2. Récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

*Initialisation* : Pour  $n = 0$  et  $n = 1$  la propriété est vraie.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $n$  et montrons le au rang  $n + 1$ . On a

$$X_{n+1} = A.X_n = A.A^n.X_0 = A^{n+1}.X_0.$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n.X_0$ .

3. On a :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 + C_3]{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ X-1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2). \text{ (développement suivant la première colonne).} \end{aligned}$$

Donc  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$ . Cherchons les sous-espaces propres.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} 2x - y + z = x \\ -x + 2y - z = y \\ -x + y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = z \end{cases}$$

donc  $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  et  $\dim E_1(A) = 2 = m_1(A)$ .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} 2x - y + z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ -x + y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = -z \end{cases}$$

donc  $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  et  $\dim E_2(A) = 1 = m_2(A)$ .

Ainsi,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. Récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

*Initialisation* : Pour  $n = 0$  et  $n = 1$  la propriété est vraie.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $n$  et montrons le au rang  $n + 1$ . On a

$$A^{n+1} = A^n.A = PD^nP^{-1}.PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

*Conclusion :* Par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^n P^{-1}$ .

5. On a  $X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$  donc il reste à calculer  $P^{-1}$ . Pour cela, on va utiliser la méthode des systèmes linéaires.

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tels que  $PX = Y$ . On a :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= y_1 \\ x_1 + x_3 &= y_2 \\ x_2 + x_3 &= y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$$

donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et par suite

$$X_n = PD^n P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n x_0 + (1 - 2^n) y_0 + (2^n - 1) z_0 \\ (1 - 2^n) x_0 + 2^n y_0 + (1 - 2^n) z_0 \\ (1 - 2^n) x_0 + (2^n - 1) y_0 + (2 - 2^n) z_0 \end{pmatrix}.$$

Finalement,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{cases} x_n &= 2^n x_0 + (1 - 2^n) y_0 + (2^n - 1) z_0 \\ y_n &= (1 - 2^n) x_0 + 2^n y_0 + (1 - 2^n) z_0 \\ z_n &= (1 - 2^n) x_0 + (2^n - 1) y_0 + (2 - 2^n) z_0 \end{cases}$  avec  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ .

**Corrigé de l'exercice 30.** 1. La matrice  $A$  est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts donc  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp } A = \{-1, 3, 0\}$ . Les sous-espaces propres associés sont :

$$E_{-1} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Par suite,  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. a. On a  $M^2 = (P^{-1}XP)^2 = P^{-1}X^2P$  donc  $M^2 + M = P^{-1}X^2P + P^{-1}XP = P^{-1}(X^2 + X) = P^{-1}AP = D$ .  
b. On a  $DM = (M^2 + M)M = M(M^2 + M) = MD$ .  
c. Posons  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ . L'égalité  $DM = MD$  entraîne que  $m_{i,j} = 0$  pour tout  $i \neq j$  et la matrice  $M$  est diagonale.
3. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On a

$$M^2 + 2M = D \iff \begin{cases} a^2 + 2a &= -1 \\ b^2 + 2b &= 3 \\ c^2 + 2c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -1 \\ b &\in \{-3, 1\} \\ c &\in \{-2, 0\} \end{cases}$$

D'où les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont les (quatre) matrices  $PMP^{-1}$  avec  $M = \text{diag}(-1, b, c)$  où  $b \in \{-3, 1\}$ ,  $c \in \{-2, 0\}$ .

**Corrigé de l'exercice 31.** 1. Le polynôme caractéristique de  $u$  est donné par  $\chi_u = X^{n-1}(X - \text{Tr } u)$ . On a  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\dim E_0(u) = \dim \ker u = n - 1$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \text{Tr } u \neq 0 &\iff \dim E_{\text{Tr } u}(u) = 1 = m_{\text{Tr } u}(u) \text{ et } \dim E_0(u) = n - 1 = m_0(u) \\ &\iff u \text{ est diagonalisable.} \end{aligned}$$

2. La matrice  $E_{i,j}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de rang 1 donc  $E_{i,j}$  est diagonalisable si, et seulement si,  $\text{Tr } E_{i,j}$  est non nulle si, et seulement si,  $i = j$ .

**Corrigé de l'exercice 32.** 1. Si  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  alors  $u(M) = aM + bM^T = aM + bM = (a + b)M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  donc  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est stable par  $u$ .

Si  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  alors  $u(M) = aM + bM^T = aM - bM = (a - b)M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  donc  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est stable par  $u$ .

2. On sait que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Soit alors  $\mathcal{B}$  une base adaptée à cette décomposition. La matrice de  $u$  dans cette base est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} (a+b)\mathbf{I}_s & \mathbf{O}_{s, n^2-s} \\ \mathbf{O}_{n^2-s, s} & (a-b)\mathbf{I}_{n^2-s} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad s = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale donc  $u$  est diagonalisable et  $\text{Sp } u = \{a+b, a-b\}$ .

3.  $u$  est diagonalisable donc  $\chi_u$  est scindé et par suite

$$\text{Tr } u = (a+b)s + (a-b)(n^2-s) = an^2 + bn \quad \text{et} \quad \det u = (a+b)^s (a-b)^{n-s} = (a+b)^{n(n+1)/2} (a-b)^{n(n-1)/2}.$$

**Corrigé de l'exercice 33.** 1. a. La matrice  $A$  est de taille  $n$  et possède  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  donc  $A$  est diagonalisable et il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ .

b. Soit  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} R \text{ est une racine carrée de } A &\iff R^2 = A \\ &\iff R^2 = PDP^{-1} \\ &\iff P^{-1}R^2P = D \\ &\iff (P^{-1}RP)^2 = D \\ &\iff P^{-1}RP \text{ est une racine carrée de } D. \end{aligned}$$

2. a. On a  $\Delta^2 = D$  donc  $\Delta D = \Delta \Delta^2 = \Delta^2 \Delta = D \Delta$ .

b. Soit  $\Delta = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned} \Delta D = D \Delta &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (\Delta D)_{i,j} = (D \Delta)_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad d_{i,j} \lambda_j = \lambda_i d_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad d_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies d_{i,j} = 0. \quad (\text{car } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j) \end{aligned}$$

donc  $\Delta$  est une matrice diagonale.

c. On a  $\Delta^2 = D$  donc  $\text{diag}(\delta_1^2, \dots, \delta_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  c-à-d  $\delta_i^2 = \lambda_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

3. S'il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_{i_0} < 0$  alors  $\delta_{i_0}^2 = \lambda_{i_0} < 0$  ce qui est absurde. Par suite  $\mathcal{R}_n(A) = \emptyset$ .

4. a. D'après ce qui précède, les racines carrées de  $D$  sont de la forme  $\Delta = \text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n})$ .

b. D'après la première question, les racines carrées de  $A$  sont de la forme  $R = P \text{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm\sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$ .

c. Comme  $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ , deux cas se présentent :

- Si  $\lambda_1 > 0$ , alors  $\text{Card } \mathcal{R}_n(A) = 2^n$ .
- Si  $\lambda_1 = 0$ , alors  $\text{Card } \mathcal{R}_n(A) = 2^{n-1}$ .

D'où, le nombre des racines carrées de la matrice  $A$  égal à  $\begin{cases} 2^n & \text{si } \lambda_1 > 0 \\ 2^{n-1} & \text{si } \lambda_1 = 0 \end{cases}$

5. La matrice  $A$  est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts donc  $A$  est diagonalisable et  $\text{Sp } A = \{1, 2, 3\}$ . Cherchons les sous-espaces propres de  $A$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . On a

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} x & = & x \\ 2y + z & = & y \\ 3z & = & z \end{cases} \iff y = z = 0$$

donc  $E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} x &= 2x \\ 2y + z &= 2y \\ 3z &= 2z \end{cases} \iff x = z = 0$$

$$\text{donc } E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X \in E_3(A) \iff AX = 3X \iff \begin{cases} x &= 3x \\ 2y + z &= 3y \\ 3z &= 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= z \end{cases}$$

$$\text{donc } E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Par suite, } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(1, 2, 3) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\mathcal{R}_3(A) = \left\{ P \text{diag}(1, 2, 3)P^{-1}, \quad P \text{diag}(-1, 2, 3)P^{-1}, \quad P \text{diag}(1, -2, 3)P^{-1}, \quad P \text{diag}(1, 2, -3)P^{-1}, \right. \\ \left. P \text{diag}(-1, -2, 3)P^{-1}, \quad P \text{diag}(1, -2, -3)P^{-1}, \quad P \text{diag}(-1, 2, -3)P^{-1}, \quad P \text{diag}(-1, -2, -3)P^{-1} \right\}.$$

On a  $8 = 2^3$  solutions.

## 5 Nilpotence, trigonalisabilité

**Corrigé de l'exercice 34. 1.** La matrice  $A$  est triangulaire supérieure stricte on a :

$$u(e_1) = 0 \text{ et } u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}) \text{ pour } 2 \leq i \leq n.$$

$$\text{Donc } \text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}).$$

**2.** Récurrence sur  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$  la propriété est vraie d'après la question précédente.

*Hérédité* : Soit  $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons le au rang  $k+1$ . On a

$$\begin{aligned} \text{Im}(u^{k+1}) &= u(\text{Im}(u^k)) \\ &\subset u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k})) \\ &= \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_{n-k})) \\ &\subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k-1}) \text{ car } u(e_{n-k}) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k-1}) \text{ puisque } 2 \leq n-k \leq n \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $k+1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\text{Im}(u^k) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k})$ .

**3.** En particulier, pour  $k = n-1$ , on a

$$\text{Im}(u^{n-1}) \subset \text{Vect}(e_1) \implies \text{Im}(u^n) \subset u(\text{Vect}(e_1)) = \text{Vect}(u(e_1)) = \{0_E\}.$$

Il s'ensuit que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  d'où  $A^n = O_n$ .

**Corrigé de l'exercice 35. 1.**  $u$  est nilpotent d'indice  $p \in \mathbb{N}^*$  donc  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Soit  $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$  tel que  $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ . Montrons que la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  est libre.

Soit  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$  tels que  $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0_E$ . Montrons que  $\lambda_k = 0$  pour tout  $0 \leq k \leq p-1$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe  $i_0 \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  tel que  $\lambda_{i_0} \neq 0$ . Posons alors  $k = \min \{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \lambda_i \neq 0\}$ . On a :

$$\lambda_k \neq 0 \text{ et } \lambda_k u^k(x_0) + \lambda_{k+1} u^{k+1}(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

En appliquant  $u^{p-1-k}$ , on obtient

$$\underbrace{\lambda_k u^{p-1}(x_0)}_{\neq 0_E} + \underbrace{\lambda_{k+1} u^p(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{2p-2-k}(x_0)}_{=0_E} = 0_E$$

donc  $\lambda_k = 0$  ce qui est absurde. Ainsi, la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  est libre.

2. Comme la famille  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$  est libre, on a  $\text{Card}(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)) \leq \dim E$  c-à-d  $p \leq n$ .  
Par suite,  $u^n = u^{n-p}u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Corrigé de l'exercice 36.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire inférieure.

Posons  $P = \begin{pmatrix} (0) & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & (0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a  $P^2 = I_n$  donc  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a_{n,n} & \dots & \dots & a_{n,1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{1,1} \end{pmatrix} = T$$

qui est une matrice triangulaire supérieure. Ainsi,  $A = PTP^{-1}$  et par suite,  $A$  est trigonalisable.

**Corrigé de l'exercice 37. 1.** Soit  $\lambda \in \text{Sp } u$ . Il existe  $x \in E \setminus \{0_E\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que  $u^k(x) = \lambda^k x$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$  la propriété est vraie.

*Hérédité* : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons le au rang  $k + 1$ . On a

$$u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(\lambda^k x) = \lambda^k u(x) = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$$

donc la propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k(x) = \lambda^k x$ .

Ainsi,  $\lambda^k$  est une valeur propre de  $u^k$ .

2. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  alors l'endomorphisme  $u$  est trigonalisable donc il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $\text{Sp } u = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Aussi, la matrice de  $u^k$  dans  $\mathcal{B}$  est  $T^k$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star' & \dots & \star' \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star' \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $\text{Sp } u^k = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$ .

3. Supposons  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Soit  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  avec  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$  et  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $R_\theta$ .

On a  $R_\theta^k = R_{k\theta}$ . En choisissant  $\theta = \frac{\pi}{k}$ , on obtient  $u^k = -\text{Id}$  donc  $\text{Sp } u = \emptyset$  et  $\text{Sp } u^k = \{-1\}$ .

**Corrigé de l'exercice 38. 1.** On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ X-1 & X-1 & 0 \\ X-1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & X-1 & 0 \\ 1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 4 & X-4 \end{vmatrix}.$$

On développe selon la première colonne, on obtient  $\chi_A = (X-1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)(X(X-4)+4) = (X-1)(X-2)^2$ .

Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  donc  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Cherchons les sous-espaces propres.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} x + y - z = x \\ y = y \\ x - 3y + 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ x = y = z \end{cases}$$

donc  $E_1(A) = \text{Vect} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_1} = \text{Vect}(e_1)$  et  $\dim E_1(A) = 1 = m_1(A)$ .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ y = 2y \\ x - 3y + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ y = 0 \\ x - 3y + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 2x \\ x = -z \end{cases}$$

donc  $E_2(A) = \text{Vect} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=e_2} = \text{Vect}(e_2)$  et  $\dim E_2(A) = 1 \neq m_2(A)$ . La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $e_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  forme une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On a :

$$u(e_3) = -e_2 + 2e_3 \iff \begin{pmatrix} a+b-c \\ b \\ a-3b+3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2a \\ 2b \\ 1+2c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b-c = -1+2a \\ b = 2b \\ a-3b+3c = 1+2c \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a+c = 1 \end{cases}.$$

Le vecteur  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  convient et, la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  forme une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

3.  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  à la base  $\mathcal{B}$  :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ .

Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , que  $A^k = PT^kP^{-1}$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$  la propriété est vraie.

*Hérédité* : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons le au rang  $k+1$ . On a

$$A^{k+1} = AA^k = APT^kP^{-1} = PTP^{-1}PT^kP^{-1} = PT^{k+1}P^{-1}$$

donc la propriété est vraie au rang  $k+1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = PT^kP^{-1}$ .

4. On écrit la matrice  $T$  par blocs :  $T = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,2} \\ O_{1,2} & T_0 \end{pmatrix}$  avec  $T_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On a, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T^k = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,2} \\ O_{1,2} & T_0^k \end{pmatrix}$ .

Par ailleurs,  $T_0 = 2I_2 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  nilpotente d'indice 2. La formule de binôme de Newton donne :

$$T_0^k = (2I_2 + N)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 2^{k-j} N^j = \binom{k}{0} 2^k I_2 + \binom{k}{1} 2^{k-1} N = 2^k I_2 + k 2^{k-1} N = \begin{pmatrix} 2^k & -k 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Donc  $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & -k 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$ . Il reste à calculer  $P^{-1}$ . Pour cela, on va utiliser la méthode des systèmes linéaires. Soit

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  tels que  $PX = Y$ . On a :

$$PX = Y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 &= y_1 \\ x_1 &= y_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = -y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Finalement,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = \begin{pmatrix} 2^k - k2^{k-1} & 1 + (k-1)2^k & -k2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ k2^{k-1} & 1 - (k+1)2^k & 2^k + k2^{k-1} \end{pmatrix}$ .

**Corrigé de l'exercice 39.** 1. La matrice  $A$  est trigonalisable donc il existe  $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure et  $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$

telle que  $A = PTP^{-1}$ . Notons  $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ .

- Si  $b = 0$  alors  $A$  serait diagonalisable ce qui est exclu.
- Si  $a \neq c$  alors la matrice  $A$  possède deux valeurs propres distinctes et  $A$  serait diagonalisable, ce qui est exclu.

Donc nécessairement  $T = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $b \in \mathbb{C}^*$ . On écrit  $T = \alpha I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N_0} = \alpha I_2 + N_0$ . Ainsi,

$$A = PTP^{-1} = P(\alpha I_2 + N_0)P^{-1} = \alpha I_2 + \underbrace{PN_0P^{-1}}_{=N} = \alpha I_2 + N$$

et  $N^2 = (PN_0P^{-1})^2 = PN_0^2P^{-1} = O_2$  et  $N \neq O_2$  donc  $N$  est nilpotente d'indice 2.

2. Notons  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$  donc  $\text{Sp } A = \{1\}$ . La matrice  $A$  n'est

pas diagonalisable car sinon  $A = I_2$ . D'après la première question,  $A = I_2 + N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  nilpotente d'indice

2. Soit  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  solution de l'équation  $X^n = A$ . La matrice  $X$  n'est pas diagonalisable car sinon  $A$  serait diagonalisable. D'après la première question,  $X = \alpha I_2 + N'$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$  valeur propre de  $X$  et  $N' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  nilpotente d'indice 2. On a  $\alpha^n$  est valeur propre de  $A$  donc  $\alpha^n = 1$ . Aussi, par la formule du binôme de Newton, on a alors

$$X^n = (\alpha I_2 + N')^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha^{n-j} N'^j = \binom{n}{0} \alpha^n I_2 + \binom{n}{1} \alpha^{n-1} N' = \alpha^n I_2 + n \alpha^{n-1} N' = I_2 + \frac{n}{\alpha} N'$$

donc  $N' = \frac{\alpha}{n} N$ . Inversement, les matrices  $X = I_2 + \frac{\alpha}{n} N$  avec  $\alpha \in \mathbb{U}_n$  sont effectivement solutions.

**Corrigé de l'exercice 40.** 1. La matrice  $A$  est à coefficients complexes donc  $A$  est trigonalisable : il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  triangulaire supérieure telle que  $A = PTP^{-1}$ .

2. Notons  $T = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Comme  $A$  est inversible alors  $T$  l'est aussi donc  $b_{i,i} \neq 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Considérons

l'application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  définie par  $\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ tb_{i,j} & \text{si } i < j \\ r_j^t e^{it\theta_j} & \text{si } i = j \text{ où } b_{j,j} = r_j e^{i\theta_j} \end{cases}$ .

$\gamma$  est un chemin inscrit dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et on a  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma(1) = T$ .

3. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t &\mapsto P\gamma(t)P^{-1} \end{aligned}$$

$\varphi$  est un chemin inscrit dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  et on a  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma(1) = PTP^{-1} = A$ . D'où  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

**Corrigé de l'exercice 41.** On commence par calculer  $\chi_A$ . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X(X-2)+1) = (X-1)^3$$

donc  $\text{Sp } A = \{1\}$ . Cherchons le sous-espace propre de  $A$ .

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} x &= x \\ -z &= y \\ y+2z &= z \end{cases} \iff y = -z$$

donc  $X = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=e_1} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=e_2}$  et par suite,  $E_1(A) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ .

Notons  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . L'expression de la matrice  $T$  impose à considérer la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  où  $e_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  à chercher de sorte que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$ . Le vecteur  $e_3$  vérifie  $u(e_3) = e_2 + e_3$ . Posons  $e_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

On a :

$$u(e_3) = e_2 + e_3 \iff \begin{pmatrix} a \\ -c \\ b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-1 \\ c+1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -c = b-1 \\ b+2c = c+1 \end{cases} \iff b+c=1.$$

Le vecteur  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  convient et, la famille  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  forme une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . La matrice de passage est alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé de l'exercice 42.** 1. On commence par calculer  $\chi_A$ . On a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 2 \\ -1 & X-a & 1 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_3} \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ X & -1 & X+1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & X-a & 1 \\ 1 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} X \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ X-a & X-a & 1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = \\ &= X(X-a) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & X-a & 1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = -X(X-a) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & X+1 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-a) \end{aligned}$$

donc  $\chi_A = X(X-1)(X-a)$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . Trois cas se présentent :

- Si  $a \notin \{0, 1\}$  alors  $\chi_A$  est scindé à racines simples et par suite,  $A$  est diagonalisable.
- Si  $a = 0$  alors  $\text{rg } A = 2$  donc  $\dim E_0(A) = \dim \ker(A) = 1 \neq m_0(A) = 2$  et la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.
- Si  $a = 1$  alors  $\text{rg}(I_3 - A) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$  donc  $\dim E_1(A) = \dim \ker(I_3 - A) = 1 \neq m_1(A) = 2$  et la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

On conclut  $\Omega = \{0, 1\}$ .

2. Cas :  $a = 0$ . Cherchons les sous-espaces propres.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = O_{3,1} \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\text{donc } E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = x \\ x - z = y \\ x + y - z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\text{donc } E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $A = PTP^{-1}$  avec  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 2 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  de sorte que



$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (*).$$

On choisit par exemple  $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$  de sorte que  $P$  soit inversible et  $(*)$  possède une solution  $(t_1 = -1, t_2 = 1)$ .

Finalement, la matrice suivante convient  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Cas :  $a = 1$ . Même démarche que précédemment, la matrice suivante convient  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 6 Réduction et polynômes annulateurs

**Corrigé de l'exercice 43.** 1. Soit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . Pour tout  $x \in F$ , on a

$$P(u)(x) = \left( \sum_{k=0}^p a_k u^k \right)(x) = \sum_{k=0}^p a_k \underbrace{u^k(x)}_{\in F} \in F$$

donc  $F$  est stable par  $P(u)$ . Par ailleurs, l'application  $u \mapsto u_F$  est un morphisme d'algèbres et donc

$$P(u)_F = \left( \sum_{k=0}^p a_k u^k \right)_F = \sum_{k=0}^p a_k (u^k)_F = \sum_{k=0}^p a_k u_F^k = P(u_F).$$

2. Montrons par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  que  $u^k v = v u^k$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$  la propriété est vraie car  $u$  et  $v$  commutent.

*Hérédité* : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons le au rang  $k + 1$ . On a

$$u^{k+1}v = u u^k v = u v u^k = v u u^k = v u^{k+1}$$

donc la propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k v = v u^k$ .

De même, on montre que :  $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, u^k v^\ell = v^\ell u^k$ . Maintenant, soient  $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i, Q = \sum_{j=0}^q b_j X^j \in \mathbb{K}[X]$ . On a :

$$P(u) \circ Q(v) = \left( \sum_{i=0}^p a_i u^i \right) \circ \left( \sum_{j=0}^q b_j v^j \right) = \sum_{k=0}^{p+q} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j u^i \circ v^j \right) = \sum_{k=0}^{p+q} \left( \sum_{i+j=k} b_j a_i v^j \circ u^i \right) = \left( \sum_{j=0}^q b_j v^j \right) \circ \left( \sum_{i=0}^p a_i u^i \right) = Q(v) \circ P(u).$$

donc  $P(u)$  et  $Q(v)$  commutent et d'après le cours,  $\ker(P(u))$  et  $\text{Im}(P(u))$  sont stables par  $Q(v)$ .

**Corrigé de l'exercice 44.** Soit  $Q = \sum_{i=0}^p a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ . On a

$$Q(A) = \sum_{i=0}^p a_i A^i = \sum_{i=0}^p a_i (PBP^{-1})^i = \sum_{i=0}^p a_i P B^i P^{-1} = P \left( \sum_{i=0}^p a_i B^i \right) P^{-1} = PQ(B)P^{-1}$$

et par suite,  $Q(A) = O_n \iff PQ(B)P^{-1} = O_n \iff Q(B) = O_n$ . Ainsi,  $A$  et  $B$  ont les mêmes polynômes annulateurs.

**Corrigé de l'exercice 45.** Le polynôme  $X^3 - 1$  est annulateur de  $A$ .

- Dans  $\mathbb{R}$ ,  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$ . Or  $A$  est une matrice réelle de taille impaire donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$  et par suite  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$ .
- Dans  $\mathbb{C}$ ,  $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ , donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, j^2\}$ . Puisque 1 est valeur propre et que les valeurs propres de  $A$  sont deux à deux conjuguées, on a :  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$  ou  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, j, j^2\}$ .

On en déduit  $\text{Tr}(A) \in \{0, 3\}$  et  $\det(A) = 1$ .

**Corrigé de l'exercice 46.** Soit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme annulateur de  $u$ . On a

$$0 = P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k = a_0 \text{Id}_E + \sum_{k=1}^p a_k u^k = a_0 \text{Id}_E + \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} u^{k+1} = a_0 \text{Id}_E + \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} u^k \right) \circ u.$$

Or  $a_0 \neq 0$  car  $P(0) \neq 0$  donc  $\text{Id}_E = \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} u^k \right) \circ u = u \circ \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} u^k \right)$ . Ainsi,  $u$  est inversible et

$$u^{-1} = \frac{-1}{a_0} \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} u^k \right) \in \mathbb{K}[u].$$

**Corrigé de l'exercice 47.** 1. Par la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$ , il existe  $(Q_k, R_k) \in (\mathbb{K}[X])^2$  tel que

$$X^k = Q_k(X)P(X) + R_k(X) \text{ avec } \deg R_k \leq N-1.$$

donc

$$u^k = Q_k(u) \circ \underbrace{P(u)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} + R_k(u) = R_k(u) \in \text{Vect}(u^i, 0 \leq i \leq N-1).$$

$P(u) = 0$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton. D'où  $u^k \in \text{Vect}(u^i, 0 \leq i \leq N-1)$ .

2. On commence par calculer  $\chi_A$ . On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2 & 5 & X+4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3} \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ -X-1 & X & -1 \\ X+1 & 5 & X+4 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & 5 & X+4 \end{vmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 6 & X+4 \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne, on obtient  $\chi_A = (X+1) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 6 & X+4 \end{vmatrix} = (X+1)((X-1)(X+4)+6) = (X+1)^2(X+2)$ .

La division euclidienne de  $X^k$  par  $\chi_A$  donne :

$$X^k = Q_k(X)\chi_A(X) + a_k X^2 + b_k X + c_k \text{ avec } (a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3.$$

donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = a_k A^2 + b_k A + c_k I_3$  (\*). Les équations  $\chi_A(-1) = \chi'_A(-1) = \chi_A(-2) = 0$  conduit au système

$$\begin{cases} (-1)^k &= a_k - b_k + c_k \\ k(-1)^{k-1} &= -2a_k + b_k \\ (-2)^k &= 4a_k - 2b_k + c_k \end{cases}$$

donc  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = (-1)^k(2^k - k - 1)$ ,  $b_k = (-1)^k(2^{k+1} - 3k - 2)$  et  $c_k = (-1)^k(2^k - 2k)$ . La relation (\*) donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 2^k - 2k & 2^{k+1} - 3k - 2 & 2^k - k - 1 \\ -2^{k+1} + 2k + 2 & -2^{k+2} + 3k + 5 & -2^{k+1} + k + 2 \\ 2^{k+2} - 2k - 4 & 2^{k+3} - 3k - 8 & 2^{k+2} - k - 3 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé de l'exercice 48.** On a  $\Pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$  donc  $(\Pi_u(u))_F = \Pi_u(u_F) = 0_{\mathcal{L}(F)}$ .

Le polynôme  $\Pi_u$  est annulateur de  $u_F$  donc  $\Pi_{u_F}$  divise  $\Pi_u$ .

**Corrigé de l'exercice 49.**  $\chi_A = (X-1)^2$ . La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable donc  $\Pi_A = (X-1)^2$ .

$\chi_B = (X-2)(X-3)$ . La matrice  $B$  est diagonalisable donc  $\Pi_B = (X-2)(X-3)$ .

**Corrigé de l'exercice 50.** 1. Supposons  $\chi_A = X^n$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_A(A) = O_n$  donc  $A^n = O_n$  et par suite,  $A$  est nilpotente.

Inversement, supposons  $A$  est nilpotente. D'après le cours,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc  $\chi_A = X^n$ .

2. Supposons  $\Pi_A = X^p$ . On a  $\Pi_A(A) = A^p = O_n$  et  $A^{p-1}$  est non nulle donc  $A$  est nilpotente d'indice  $p$ .

Inversement, Supposons  $A$  est nilpotente d'indice  $p$ . On a  $A^p = O_n$  et  $A^{p-1}$  est non nulle. Le polynôme  $X^p$  est annulateur de  $A$  donc  $\Pi_A$  divise  $X^p$  donc  $\Pi_A = X^r$  avec  $r \leq p$ . Si  $r < p$ , alors  $A^r = O_n$  et par suite,  $p \leq r$ . D'où  $\Pi_A = X^p$ .

**Corrigé de l'exercice 51.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables :  $A = PBP^{-1}$  où  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ . On a :

$$\Pi_A(A) = P \Pi_A(B) P^{-1} \text{ et } \Pi_B(A) = P \Pi_B(B) P^{-1}$$

donc  $\Pi_A(B) = O_n$  et  $\Pi_B(A) = O_n$ . Par suite,  $\Pi_B$  divise  $\Pi_A$  et  $\Pi_A$  divise  $\Pi_B$ . Comme les polynômes  $\Pi_A$  et  $\Pi_B$  sont unitaires, alors  $\Pi_A = \Pi_B$ .

**Corrigé de l'exercice 52.** 1. Supposons  $\text{rg } A = 1$  et notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ . On a

$$\text{rg } A = \dim \text{Im } A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = 1$$

donc il existe  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{O_{n,1}\}$  tel que  $\dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(U)$ . Comme chaque  $C_i$  est dans  $\text{Vect}(U)$ ,

on a  $C_i = v_i \cdot U$  avec  $v_i \in \mathbb{K}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Posons  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$ . La colonne  $V$  est non nulle car  $A$  n'est pas nulle.

Ainsi,

$$A = (v_1 \cdot U, \dots, v_n \cdot U) = \begin{pmatrix} v_1 u_1 & \dots & v_n u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1 u_n & \dots & v_n u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_n) = UV^\top.$$

Inversement, supposons qu'il existe  $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{O_{n,1}\}$  telles que  $A = UV^\top$ . Avec les notations précédentes,

$$\text{rg } A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \dim \text{Vect}(v_1 \cdot U, \dots, v_n \cdot U) = \dim \text{Vect}(U)$$

et puisque  $U$  est non nulle, on a donc  $\text{rg } A = 1$ .

2. Si  $A$  est une matrice carrée de rang 1 alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} A^2 &= UV^\top UV^\top \\ &= V^\top U (UV^\top) \quad \text{car } V^\top U \text{ est un scalaire} \\ &= V^\top U A \end{aligned}$$

De plus,  $V^\top U = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{Tr}(A)$ . Ainsi,  $A^2 = \text{Tr}(A) \cdot A$  et le polynôme  $X^2 - \text{Tr}(A) \cdot X$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Supposons  $\text{rg}(A) = 1$ .

a. On a  $\Pi_A$  divise  $X^2 - \text{Tr}(A)X$  donc  $\Pi_A = X$ ,  $X - \text{Tr}(A)$  ou  $X^2 - \text{Tr}(A)X$ .

- Si  $\Pi_A = X$  alors  $A$  est la matrice nulle, ce qui est exclu.
- Si  $\Pi_A = X - \text{Tr}(A)$  alors  $A = \text{Tr}(A) \cdot I_n$  et donc  $\text{rg } A = \begin{cases} n & \text{si } \text{Tr}(A) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \text{Tr}(A) = 0 \end{cases}$  ce qui est exclu.

D'où  $\Pi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X$ .

b. D'après la question précédente,  $\text{Sp } A = \{0, \text{Tr}(A)\}$  donc

$I_n + A$  est inversible si, et seulement si,  $-1 \notin \text{Sp } A$  si, et seulement si,  $\text{Tr}(A) \neq -1$ .

On sait que  $(I_n + A)^{-1} \in \mathbb{K}[I_n + A] \subset \mathbb{K}[A]$  donc il existe  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $(I_n + A)^{-1} = P(A)$ .

Par ailleurs, pour  $k \geq 2$ ,  $A^k = \text{Tr}(A)^{k-1} A$  donc  $(I_n + A)^{-1}$  est de la forme :

$$(I_n + A)^{-1} = \alpha I_n + \beta A \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$$

Le calcul  $(I_n + A)^{-1} (I_n + A) = I_n$  donne  $\alpha I_n + (\alpha + \beta(1 + \text{Tr}(A)))A = I_n$ . La famille  $(I_n, A)$  est libre, donc nécessairement,

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1}{1 + \text{Tr}(A)}.$$

D'où  $(I_n + A)^{-1} = I_n + \frac{-1}{1 + \text{Tr}(A)} A$ .

**Corrigé de l'exercice 53.**  $X^n - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$  donc  $\Pi_A$  divise  $X^n - 1$ . Si  $\deg \Pi_A < n$  alors la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$  serait liée donc  $\deg \Pi_A = n$  et par suite,  $\Pi_A = X^n - 1$ .

Les racines de  $\Pi_A$  sont les  $e^{2i\pi/k}$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  donc  $\text{Tr}(A) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi/k} = 0$ .

**Corrigé de l'exercice 54.** Le polynôme  $X^3 - 1$  est annulateur de  $u$  et on a  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ . Les polynômes  $X - 1$  et  $X^2 + X + 1$  sont premiers entre eux, par le lemme de décomposition des noyaux,

$$\ker(u^3 - \text{Id}_E) = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}_E).$$

Aussi,  $\ker(u^3 - \text{Id}_E) = \ker(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$ . Ainsi,  $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}_E)$ .

**Corrigé de l'exercice 55.** Le polynôme  $X^4 + X$  est annulateur de  $u$  et on a  $X^4 + X = X(X^3 + 1)$ . Les polynômes  $X$  et  $X^3 + 1$  sont premiers entre eux, par le lemme de décomposition des noyaux,

$$\ker(u^4 + u) = \ker(u) \oplus \ker(u^3 + \text{Id}_E).$$

Aussi,  $\ker(u^4 + u) = \ker(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$  donc  $E = \ker(u) \oplus \ker(u^3 + \text{Id}_E)$ . Or  $(u^3 + \text{Id}_E) \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$  donc  $\text{Im } u \subset \ker(u^3 + \text{Id}_E)$ . De plus, si  $x \in \ker(u^3 + \text{Id}_E)$ , alors  $x = -u^3(x) \in \text{Im } u$  donc  $\ker(u^3 + \text{Id}_E) \subset \text{Im } u$  et par suite,  $\ker(u^3 + \text{Id}_E) = \text{Im } u$ . D'où  $E = \ker(u) \oplus \text{Im } u$ .

**Corrigé de l'exercice 56.** Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . On a

$$\varphi^2(P) = \varphi(\varphi(P)) = X^n \varphi(P) \left( \frac{1}{X} \right) = X^n \cdot \left( \frac{1}{X} \right)^n P(X) = P(X)$$

donc  $\varphi^2 = \text{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}$ . Ainsi, le polynôme  $X^2 - 1$  est annulateur de  $\varphi$  et scindé à racines simples donc  $\varphi$  est diagonalisable.

**Corrigé de l'exercice 57. 1.** On a  $A^2 = I_4$ . Le polynôme  $X^2 - 1$  est annulateur de  $A$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$  donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .

2. On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2 + C_3]{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & -1 \\ X-1 & X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X-1 & X & 0 \\ X-1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - L_4} (X-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -X-1 \\ 0 & 0 & -X-1 & 0 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2 (X+1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & X \end{vmatrix}.$$

On développe selon la première colonne (deux fois), on obtient  $\chi_A = -(X-1)^2(X+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^2$ .

3. La décomposition en éléments simples de la fraction  $\frac{1}{\chi_A}$  s'écrit :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + \frac{c}{(X+1)^2} + \frac{d}{(X+1)}$$

avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . La fraction  $\frac{1}{\chi_A}$  étant paire, donc par unicité de la décomposition,  $a = c$  et  $b = -d$ .

On a  $a = (X-1)^2 \frac{1}{\chi_A} \Big|_{X=1} = 1/4$ . La décomposition ci-dessus devienne :

$$\frac{-1/2}{(X-1)(X+1)} = \frac{b}{(X-1)} + \frac{d}{(X+1)}$$

et  $b = (X-1) \frac{-1/2}{(X-1)(X+1)} \Big|_{X=1} = -1/4$ . Ainsi,

$$\frac{1}{\chi_A} = \frac{1/4}{(X-1)^2} + \frac{-1/4}{X-1} + \frac{1/4}{(X+1)^2} + \frac{1/4}{(X+1)}.$$

4. a. Comme  $u$  est diagonalisable, on a  $E_{-1}(u) \oplus E_1(u) = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ . On a  $1 = \frac{1}{4}(X-1)^2(X+2) - \frac{1}{4}(X+1)^2(X-2)$ , donc

$$\text{Id} = \frac{1}{4}(u - \text{Id})^2(u + 2\text{Id}) - \frac{1}{4}(u + \text{Id})^2(u - 2\text{Id})$$

c-à-d  $\text{Id} = p_1 + p_2$

- Si  $x \in E_1(u)$ , alors  $(u - \text{Id})(x) = 0$  donc

$$p_1(x) = \frac{1}{4}(u - \text{Id})^2(u + 2\text{Id})(x) = \frac{1}{4}(u + 2\text{Id})(u - \text{Id})^2(x) = \frac{1}{4}(u + 2\text{Id})(u - \text{Id}) \underbrace{(u - \text{Id})(x)}_{=0} = 0.$$

- Si  $x \in E_{-1}(u)$ , alors  $u(x) = -x$  donc

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{4}(u - \text{Id})^2(u + 2\text{Id})(x) \\ &= \frac{1}{4}(u - \text{Id})^2(u(x) + x) \\ &= \frac{1}{4}(u - \text{Id})^2(x) \\ &= \frac{1}{4}(u^2 - 2u + \text{Id})(x) \\ &= \frac{1}{4}(u^2(x) - 2u(x) + x) \\ &= \frac{1}{4}(x + 2x + x) = x \end{aligned}$$

Ainsi,  $p_1$  est la projection sur  $E_{-1}(u)$  parallèlement à  $E_1(u)$ .

Pour  $p_2$ , on a :

- Si  $x \in E_{-1}(u)$ , alors  $p_1(x) = x$  donc  $p_2(x) = x - p_1(x) = x - x = 0$ .
- Si  $x \in E_1(u)$ , alors  $p_1(x) = 0$  donc  $p_2(x) = x - p_1(x) = x - 0 = x$ .

Ainsi,  $p_2$  est la projection sur  $E_1(u)$  parallèlement à  $E_{-1}(u)$ .

- b.  $p_1$  et  $p_2$  sont les projecteurs spectraux de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  associés à la somme directe  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = E_{-1}(u) \oplus E_1(u)$ . D'après le cours,  $u = -p_1 + p_2$ .

- c. Récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$  la propriété est vraie d'après la question précédente.

*Hérédité* : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons le au rang  $k + 1$ . On a

$$u^{k+1} = uu^k = (-p_1 + p_2)((-1)^k p_1 + p_2) = (-1)^{k+1} \underbrace{p_1^2}_{=p_1} - \underbrace{p_1 p_2}_{=0} + (-1)^k \underbrace{p_2 p_1}_{=0} + \underbrace{p_2^2}_{=p_2} = (-1)^{k+1} p_1 + p_2.$$

Donc la propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k = (-1)^k p_1 + p_2$ .

- d. On a  $0 \notin \text{Sp } u = \{-1, 1\}$  donc  $u$  est inversible. Aussi,  $u^2 = p_1 + p_2 = \text{Id}$ . Ainsi,  $u^{-1} = u = -p_1 + p_2$ . D'où  $u^{-1} = -p_1 + p_2$ .

**Corrigé de l'exercice 58. 1.** D'abord, montrons que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$ .

Récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ .

*Initialisation* : Pour  $k = 1$  la propriété est vraie.

*Hérédité* : Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la propriété est vraie au rang  $k$  et montrons le au rang  $k + 1$ . On a

$$M^{k+1} = MM^k = \begin{pmatrix} A & B \\ O_n & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O_n & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & kA^k B + BA^k \\ O_n & A^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & (k+1)A^k B \\ O_n & A^{k+1} \end{pmatrix}.$$

car  $A^k B = BA^k$  puisque  $AB = BA$ . Donc la propriété est vraie au rang  $k + 1$ .

*Conclusion* : Par le principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ O_n & A^k \end{pmatrix}$ .

Maintenant, soit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ . On a

$$P(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k = a_0 I_{2n} + \sum_{k=1}^p a_k M^k = a_0 I_{2n} + \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_k A^k & \sum_{k=1}^p k a_k A^{k-1} B \\ O_n & \sum_{k=1}^p a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^p a_k A^k & \left( \sum_{k=1}^p k a_k A^{k-1} \right) B \\ O_n & \sum_{k=0}^p a_k A^k \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ O_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. Supposons  $M$  diagonalisable. On a  $\Pi_M$  est scindé à racines simples et  $O_{2n} = \Pi_M(M) = \begin{pmatrix} \Pi_M(A) & \Pi'_M(A)B \\ O_n & \Pi_M(A) \end{pmatrix}$  donc  $\Pi_M(A) = O_n$  et par suite,  $\Pi_A$  divise  $\Pi_M$  donc nécessairement  $\Pi_A$  est scindé à racines simples et cela veut dire que  $A$  est diagonalisable.

Aussi,  $\Pi'_M(A)B = O_n$ . Mais  $\Pi_M$  et  $\Pi'_M$  n'ont aucune racine complexe en commun donc premiers entre eux. La relation de Bézout donne  $1 = U \Pi_M + V \Pi'_M$ . En évaluant celle-ci en  $A$  on obtient

$$I_n = U(A) \cdot \underbrace{\Pi_M(A)}_{=O_n} + V(A) \cdot \Pi'_M(A) = V(A) \cdot \Pi'_M(A)$$

donc  $\Pi'_M(A)$  est inversible et par suite,  $B$  est nulle.

Inversement, supposons  $A$  diagonalisable et  $B$  nulle. Il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

On a alors

$$M = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & O_n \\ O_n & PDP^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & O_n \\ O_n & P \end{pmatrix}}_{=Q} \underbrace{\begin{pmatrix} D & O_n \\ O_n & D \end{pmatrix}}_{=\Delta} \begin{pmatrix} P^{-1} & O_n \\ O_n & P^{-1} \end{pmatrix} = Q\Delta Q^{-1}$$

avec  $\Delta \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  diagonale et  $Q \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ . Ainsi,  $M$  est diagonalisable.