

TD N°2

Espaces vectoriels normés

1 Normes et suites dans un evn

Exercice 1. Quelques normes usuelles.

1. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$. Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E .
2. Soit $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E .

Exercice 2. Normes sous-multiplicatives. On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3. Dans $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$, on pose : $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$.
2. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes. **Indication :** utiliser l'égalité $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 4. 1. Dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$, montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Indication : cherchons une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ telle que $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. Même question pour les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ et les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. Équivalence des normes en dimension finie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\int_0^1 |P(t)|dt \geq \lambda \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)| \text{ pour tout } P \text{ dans } \mathbb{R}_n[X].$$

Exercice 6. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, on considère $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = 2x_1\}$ et $x = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $d(x, A)$.

Exercice 7. 1. Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + y^2 = 1\}$ est borné.

2. Montrer que l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$ n'est pas borné.

Indication : cherchons une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B telle que $\|b_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 8. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que la suite $(A^n)_n$ converge et déterminer sa limite. Montrer que la suite $(B^n)_n$ diverge.

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $(A - I_3)^2 = O_3$. En déduire A^n . Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}A^n\right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

On introduit la fonction f_n définie par $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2n \\ -2n(t - 1/n) & \text{si } 1/2n \leq t \leq 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$

1. Tracer le graphe de f_n et vérifier que $f_n \in E$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_1$. Que dire de la convergence de $(f_n)_n$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?
3. Conclure.

Exercice 11. Suite divergente admettant une unique v.a. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n^{(-1)^n}$.

1. Justifier que 0 est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
2. Montrer que 0 est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 1}$. **Indication :** raisonner par l'absurde.
3. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Exercice 12. Comparaison de boules. Soient E un evn, $(a, b) \in E^2$, $r, s > 0$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer

1. $a + B(b, r) = B(a + b, r)$.
2. $\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda|r)$.
3. $B(a + b, r + s) = B(a, r) + B(b, s)$.

2 Topologie dans un evn

Exercice 13. Soit E un evn et A une partie non vide de E . Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on désigne par $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$. Montrer que si A est ouvert (resp. fermé), alors λA l'est aussi.

Exercice 14. Intersection d'ouverts et réunion de fermés. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]$. Conclure.

Exercice 15. $\mathbb{Z}$ est un fermé. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $n = \lfloor x \rfloor$ la partie entière de x . Posons $r = \min \{|x - n|, |x - n - 1|\}$. Montrer $]x - r, x + r[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En déduire que $\mathbb{Z}$ est fermé.

Exercice 16. $\mathbb{Z}$ est un fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathbb{Z}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n = x_{n_0}$. En déduire que $\mathbb{Z}$ est fermé.

Exercice 17. Déterminer l'intérieur de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 18. 1. Montrer que, si A est une partie d'un evn E et O un ouvert de E , alors $O + A$ est un ouvert de E .

2. Dans $\mathbb{R}$, on pose $A = \mathbb{Z}$ et $B = \left\{ n - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que A et B sont fermés mais $A + B$ n'est pas fermé.

Indication : pour montrer que $A + B$ n'est pas fermé, on cherche une suite $(x_n)_n$ de $A + B$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ mais $x \notin A + B$.

Exercice 19. Soient A et B deux parties d'un evn E .

1. Montrer

a. $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.	c. $A \text{ fermé} \iff A = \overline{A}$.	f. $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.	h. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.
b. $A \text{ ouvert} \iff A = \overset{\circ}{A}$.	d. $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.	g. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.	i. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
e. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.			

2. Donner des exemples où les inclusions $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ sont strictes.

Exercice 20. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel.

Exercice 21. Soit E un evn et F un sev de E . Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$. En déduire que, si F est un ouvert, alors $F = E$.

Exercice 22. Caractérisation des points adhérents à l'aide de la distance. Soit A une partie non vide de E . Montrer l'équivalence : $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$. **Indication :** utiliser la caractérisation à l'aide de epsilon de la borne inf.

Exercice 23. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme : $\|P\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$.

Démontrer que l'ensemble des polynômes nuls en 2 est dense de E . **Indication :** on pourra étudier la suite $((X/2)^n)_{n \geq 0}$.

Exercice 24. Soit E un evn de dimension infinie. Montrer que tout hyperplan H de E est soit fermé soit dense dans E .

Indication : supposons H n'est pas fermé et utiliser la décomposition de $E : E = H \oplus \text{Vect}(a)$ où $a \in E \setminus H$.

3 Continuité d'une application

Exercice 25. Soit $p \geq 1$, $E = \mathbb{R}^p$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. Montrer que l'application f définie sur E par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \geq 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| < 1 \end{cases}$ n'est pas continue en aucun point de la sphère unité de E .

Exercice 26. En utilisant l'image réciproque d'une application continue, démontrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Indication : considérons $f(x) = \sin(\pi x)$.

Exercice 27. Deux exemples classiques.

1. Soit A une partie non vide d'un evn E . Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Soit $E_1, \dots, E_p$ des evn. Montrer que la i -ième projection $\pi_i : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow E_i$, $1 \leq i \leq p$ définie par $\pi_i(x_1, \dots, x_p) = x_i$ est 1-lipschitzienne.

- Exercice 28.** 1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. **Indication** : raisonner par l'absurde.
 2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. **Indication** : regarder la dérivée.
 3. Le produit de deux applications lipschitziennes est une application lipschitzienne ?

Exercice 29. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$.
Indication : commencer par montrer l'égalité pour $x \in \mathbb{N}$.

Exercice 30. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ muni des normes usuelles $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Montrer que l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}$ est lipschitzienne pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

$$f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

4 Applications linéaires et multilinéaires continues

Exercice 31. 1. Justifier la continuité de l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \mapsto (A, A^T)$$

2. En déduire que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

$$A \mapsto AA^T$$

3. Montrer que l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AA^T = I_n\}$ est un fermé.

Exercice 32. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Indication** : utiliser l'image réciproque de l'application $\det$.

Exercice 33. Continuité de l'application inverse $A \mapsto A^{-1}$. On rappelle la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com } A)^T$ pour toute $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ où $\text{com } A$ est la comatrice de A : $\text{com } A = ((-1)^{i+j} \det(A_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $A_{i,j}$ est la matrice (de taille $n-1$) obtenu en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de la matrice A .

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Justifier que l'application $\varphi_{i,j} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est continue.

$$A \mapsto A_{i,j}$$

2. En déduire que l'application comatrice : $A \mapsto \text{com } A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Montrer alors que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 34. 1. Montrer que l'application $\varphi : (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

$$f \mapsto f(1)$$

2. Montrer que l'application $\varphi : (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue.

$$f \mapsto f(1)$$

Indication : pour montrer que φ n'est pas continue, cherchons une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 35. Calcul de la norme d'opérateur d'une application linéaire. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Étudier, dans chaque cas, la continuité de l'application linéaire φ , puis calculer $\|\varphi\|$.

1. $\varphi : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto f(1) - f(0)$$
2. $\varphi : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_0^1 t f(t) dt$$
3. $\varphi : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_0^1 f(t) \cos(\pi t) dt$$

Exercice 36. Norme subordonnée matricielle. On munit $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{K}^p, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |(A.x)_i| \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$. En déduire $\|A\|_\infty \geq \inf \{C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_\infty \leq C \|x\|_\infty\}$.

2. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sum_{j=1}^p |a_{i_0,j}| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|$ et soit $y \in \mathbb{K}^p$ tel que : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, y_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_{i_0,j} = 0 \end{cases}$.

a. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |(A.y)_i| \leq \|A\|_\infty \|y\|_\infty$. **Indication** : discuter les cas : $A = O_{n,p}$ et $A \neq O_{n,p}$.

b. En déduire que $\|A.y\|_\infty = \|A\|_\infty \|y\|_\infty$.

3. Conclure.

5 Compacité

Exercice 37. Soit E un evn de dimension finie. Montrer que la sphère unité $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est une partie compacte.

Exercice 38. Un fermé borné non compact en dimension infinie. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(t) = e^{2in\pi t}$.

1. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n \implies \|f_m - f_n\|_\infty = 2$.
2. La suite $(f_n)_n$ possède-t-elle une valeur d'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$. **Indication** : raisonner par l'absurde.
3. En déduire que la sphère unité de E n'est pas compacte.

Exercice 39. Soit A et B deux parties d'un evn E .

1. On suppose que A et B sont compacts. Montrer que $A+B$ est compact. **Indication** : utiliser la définition de la compacité.
2. On suppose que A est compact et B est fermé. Montrer que $A+B$ est fermé et non compact. **Indication** : prendre $B = E$.

Exercice 40. L'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il un compact ?

Exercice 41. Soit K un compact d'un evn E et $x \in E$. Montrer qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|x_0 - x\|$.

Indication : utiliser le théorème des bornes atteintes.

Exercice 42. Distance à un fermé en dimension finie. Soit E un evn de dimension finie et F un fermé de E . Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - a\|$. **Indication** : utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 43. Soient K un compact d'un evn E et $f : K \longrightarrow K$ telle que : $\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Montrer que f possède au plus un point fixe. **Indication** : raisonner par l'absurde.
2. Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que $\forall x \in K, \|f(x) - x\| \geq \|f(c) - c\|$.
3. En déduire que f admet un point fixe.

6 Connexité par arcs

Exercice 44. Ensemble cpa mais n'est pas étoilé.

1. Montrer, de deux façons différentes, que l'ensemble $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est connexe par arcs.
2. Montrer que U n'est pas étoilé.

Exercice 45. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

Exercice 46. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il connexe par arcs ? **Indication** : raisonner par l'absurde et utiliser le TVI.

Exercice 47. 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales est convexe.

2. Montrer que l'ensemble Ω des matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures est connexe par arcs.

Indication : si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \Omega$, considérons le chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ définie par $\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ ta_{i,j} & \text{si } i < j \\ r_j^t e^{it\theta_j} & \text{si } i = j \text{ où } a_{j,j} = r_j e^{i\theta_j} \end{cases}$

Exercice 48. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$ n'est pas connexe par arcs. **Indication** : considérons l'application $\det$.

Exercice 49. Théorème de Darboux. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Soit $A = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$. Pour $(x, y) \in A^2$, on pose $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

1. Justifier que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 50. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Indication : considérer $g(x, y) = f(x) - f(y)$ défini sur $X = \{(x, y) \in I^2, x < y\}$.

Exercice 51. Soit E un evn et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. Montrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.
3. Montrer que si, $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est connexe par arcs.