

TD N°2

Espaces vectoriels normés (correction)

1 Normes et suites dans un evn

Corrigé de l'exercice 1. 1. Pour la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $f \in E$, on a $\|f\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 |f(t)| dt$.

- Séparation : Soit $f \in E$. On a

$$\|f\|_1 = 0 \implies \int_0^1 |f(t)| dt = 0 \implies \forall t \in [0, 1], |f(t)| = 0 \implies \forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \implies f = 0.$$

Car $t \mapsto |f(t)|$ est continue et positive sur $[0, 1]$.

- Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda.f\|_1 = \int_0^1 |\lambda.f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| \|f\|_1.$$

- Inégalité triangulaire : Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

D'où $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

Pour la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $f \in E$, on a $\|f\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

- Séparation : Soit $f \in E$. On a

$$\|f\|_2 = 0 \implies \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \implies \forall t \in [0, 1], |f(t)|^2 = 0 \implies \forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \implies f = 0.$$

Car $t \mapsto |f(t)|^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$.

- Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda.f\|_2 = \left(\int_0^1 |\lambda.f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|f\|_2.$$

- Inégalité triangulaire : Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t) + g(t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 |f(t)|^2 + 2f(t)g(t) + |g(t)|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt + 2 \int_0^1 |f(t)g(t)| dt + \int_0^1 |g(t)|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt + 2 \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^1 |g(t)|^2 dt \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= \left(\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 \end{aligned}$$

donc $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

D'où $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E .

Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

- Séparation : Soit $f \in E$. On a

$$\|f\|_\infty = 0 \implies \forall t \in [0, 1], 0 \leq |f(t)| \leq \|f\|_\infty = 0 \implies \forall t \in [0, 1], |f(t)| = 0 \implies \forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \implies f = 0.$$

- Homogénéité : Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda.f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda.f(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda| \cdot |f(t)| = |\lambda| \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

- Inégalité triangulaire : Soit $(f, g) \in E^2$. On a

$$\forall t \in [0, 1], |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\text{donc } \|f + g\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) + g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

D'où $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

2. Pour la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$, on a $\|A\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

- Séparation : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$. On a

$$\begin{aligned} \|A\|_1 = 0 &\implies \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, 0 \leq |a_{i,j}| \leq \|A\|_1 = 0 \\ &\implies \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} = 0 \\ &\implies A = O_{n,p}. \end{aligned}$$

- Homogénéité : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda.A\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |\lambda.a_{i,j}| = |\lambda| \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = |\lambda| \|A\|_1.$$

- Inégalité triangulaire : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{i=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{i=1}^n |b_{i,j}| \leq \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| + \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\|_1 + \|B\|_1$$

$$\text{donc } \|A + B\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \|A\|_1 + \|B\|_1.$$

D'où $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .

Pour la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$, on a $\|A\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

- Séparation : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$. On a

$$\|A\|_2 = 0 \implies \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \implies \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} = 0 \implies A = O_{n,p}.$$

- Homogénéité : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda.A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |\lambda.a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|A\|_2.$$

- Inégalité triangulaire : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in E$. On a

$$\begin{aligned} \|A + B\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j} + b_{i,j}|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}^2 + 2a_{i,j}b_{i,j} + b_{i,j}^2| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}b_{i,j}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{i,j}|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{i,j}|^2 \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= \left(\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = (\|A\|_2 + \|B\|_2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \|A + B\|_2 \leq \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

D'où $\|\cdot\|_2$ est une norme sur E .

Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. De même que $\|\cdot\|_1$ ou on remarque aussi que $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$.

Corrigé de l'exercice 2. Pour la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |b_{k,j}| \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right) \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \sum_{k=1}^n |b_{k,j}| \leq \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |b_{k,j}| \right) = \|A\|_1 \|B\|_1$$

donc $\|AB\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |(AB)_{i,j}| \leq \|A\|_1 \|B\|_1$.

Pour la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{i,j=1}^n |(AB)_{i,j}|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= \left(\sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{j,k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = \|A\|_2^2 \|B\|_2^2 \end{aligned}$$

donc $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. De même que $\|\cdot\|_1$ ou on remarque aussi que $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$.

Corrigé de l'exercice 3. 1. Pour N_1 .

- Séparation : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$, on a

$$N_1(f) = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } \|f'\|_\infty = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } f' = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } f \text{ est constante} \implies f = 0.$$

- Homogénéité : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$N_1(\lambda.f) = |\lambda.f(0)| + \|\lambda.f'\|_\infty = |\lambda|f(0)| + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda|N_1(f).$$

- Inégalité triangulaire : Soit $f, g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$. On a

$$N_1(f+g) = |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty + |g(0)| + \|g'\|_\infty = N_1(f) + N_1(g).$$

Pour N_2 .

- Séparation : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$, on a

$$N_2(f) = 0 \implies \|f\|_\infty = 0 \text{ et } \|f'\|_\infty = 0 \implies f = 0.$$

- Homogénéité : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$N_2(\lambda.f) = \|\lambda.f\|_\infty + \|\lambda.f'\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda|N_2(f).$$

- Inégalité triangulaire : Soit $f, g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$. On a

$$N_2(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|f' + g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N_2(f) + N_2(g).$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$. On a $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_2(f)$.

D'autre part, pour tout $f \in E$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad |f(x)| &= \left| f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty \int_0^x dt \\ &\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty x \\ &\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_1(f). \end{aligned}$$

Donc $\|f\|_\infty \leq N_1(f)$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2N_1(f)$. D'où :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K}), \quad N_1(f) \leq N_2(f) \leq 2N_1(f)$$

et les normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$.

Corrigé de l'exercice 4. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ définie par : $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = t^n$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1 \quad \text{et} \quad \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n+1}.$$

Donc, les suites réelles $\left(\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas bornées.

Corrigé de l'exercice 5. On pose, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $N_1(P) = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$ et $N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$.

N_1 et N_2 sont deux normes sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie ($\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$) donc les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, en particulier, il existe $\lambda > 0$ vérifiant :

$$\int_0^1 |P(t)| dt \geq \lambda \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)| \quad \text{pour tout } P \text{ dans } \mathbb{R}_n[X].$$

Corrigé de l'exercice 6. Soit $a = (a_1, a_2) \in A$. On a

$$\begin{aligned} \|x - a\|_2 &= \|(x_1 - a_1, x_2 - a_2)\|_2 = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \\ &= \sqrt{(1 - a_1)^2 + (-1 - 2a_1)^2} \\ &= \sqrt{5} \sqrt{\left(a_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}} \\ &\geq \sqrt{5} \sqrt{\frac{9}{25}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $a_1 = \frac{-1}{5}$, $a_2 = \frac{-2}{5}$, donc $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|_2 = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Corrigé de l'exercice 7. 1. Soit $(x, y) \in A$. On a $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$ donc

$$\begin{cases} \frac{3}{4}y^2 \leq 1 \\ \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} |y| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ |x| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \implies \|(x, y)\|_\infty \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

par suite, $A \subset B_\infty\left(0, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. On pose $b_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_n = n + \frac{1}{4n}$ et $y_n = n - \frac{1}{4n}$. On a $x_n^2 - y_n^2 = 1$ donc $(b_n)_n \in B^{\mathbb{N}^*}$ et $\|b_n\|_1 = 2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Par suite, B n'est pas bornée.

Corrigé de l'exercice 8. 1. A est une matrice diagonale donc $A^n = \text{diag}(1/2^n, 3^n/5^n, 1/3^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{diag}(0, 0, 0) = O_3$. Ainsi, $(A^n)_n$ converge et de limite nulle.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La suite $((-1)^n)_n$ diverge, donc la suite $(B^n)_n$ diverge.

Corrigé de l'exercice 9. On a $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O_3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (A - I_3 + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (A - I_3)^k \quad \text{binôme de Newton car } A - I_3 \text{ et } I_3 \text{ commutent} \\ &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} (A - I_3) \\ &= I_3 + n(A - I_3). \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n} A^n = \frac{1}{n} I_3 + (A - I_3) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (A - I_3)$.

Corrigé de l'exercice 10.

1. On a f_n est continue sur $[0, 1]$ donc $f_n \in E$.

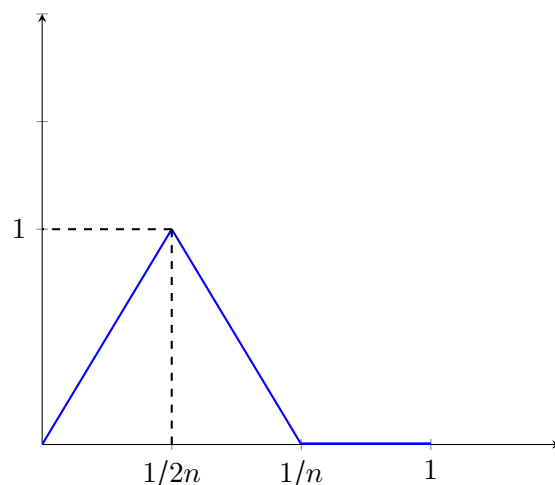
2. $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^{1/2n} 2nt dt + \int_{1/2n}^{1/n} -2n(t - 1/n) dt = \frac{1}{n}$
et donc

$$\|f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Il est clair que $\|f_n\|_\infty = 1$ donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. On retrouve que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.



Corrigé de l'exercice 11. 1. On a $x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc 0 est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

2. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$. Supposons $\ell > 0$. Il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. On a

$$\ln x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \ell \implies (-1)^{\varphi(n)} \ln \varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \ell \implies |\ln \varphi(n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ln \ell|$$

ce qui contredit le fait que $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Par suite, $\ell = 0$ et 0 est la seule valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 1}$.

3. On a $x_{2n} = 2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ diverge.

Corrigé de l'exercice 12. 1. On a

$$x \in B(a+b, r) \iff |x - a - b| < r \iff x - a \in B(b, r) \iff x \in a + B(b, r)$$

donc $a + B(b, r) = B(a+b, r)$.

2. Soit $x \in \lambda B(a, r)$, donc $x = \lambda y$ avec $y \in B(a, r)$ et

$$|x - \lambda a| = |\lambda y - \lambda a| = |\lambda||y - a| < |\lambda|r$$

c-à-d $x \in B(\lambda a, |\lambda|r)$ et $\lambda B(a, r) \subset B(\lambda a, |\lambda|r)$. De plus,

$$B(\lambda a, |\lambda|r) = \lambda \frac{1}{\lambda} B(\lambda a, |\lambda|r) \subset \lambda B(a, r).$$

D'où l'égalité : $\lambda B(a, r) = B(\lambda a, |\lambda|r)$.

3. D'après les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned} B(a+b, r+s) &= a+b + B(0, r+s) \\ &= a+b + (r+s)B(0, 1) \\ &= a+rB(0, 1) + b+sB(0, 1) \\ &= a+B(0, r) + b+B(0, s) \\ &= B(a, r) + B(b, s). \end{aligned}$$

2 Topologie dans un evn

Corrigé de l'exercice 13. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- Supposons A ouvert et soit $x \in \lambda A$. Il existe $a \in A$ tel que $x = \lambda a$. Comme A est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$ donc

$$B(x, |\lambda|r) = B(\lambda a, |\lambda|r) = \lambda B(a, r) \subset \lambda A.$$

Par suite, λA est un ouvert.

- Supposons A fermé et soit $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in E$. On a $x_n = \lambda a_n$ avec $a_n \in A$ donc

$$a_n = \frac{1}{\lambda} x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} x = a \in A \text{ et } x = \lambda a \in \lambda A.$$

Par suite, λA est un fermé.

Corrigé de l'exercice 14. On a $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ et

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[\implies \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{à la limite}} x = 0$$

donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[\subset \{0\}$. Par suite, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$.

Conclusion : une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right] \subset]-1, 1[$ donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right] \subset]-1, 1[$ et

$$\begin{aligned} x \in]-1, 1[&\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \frac{-n_0}{n_0+1} \leq x \leq \frac{n_0}{n_0+1} \\ &\text{car sinon } \forall n \geq 1, x > \frac{n}{n+1} \text{ ou } x < \frac{-n}{n+1} \text{ et à la limite, } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \\ &\implies x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right] \end{aligned}$$

donc $]-1, 1[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]$. Par suite, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-n}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right] =]-1, 1[$.

Conclusion : une intersection quelconque de fermés n'est pas nécessairement un fermé.

Corrigé de l'exercice 15. On a $r = \min \{|x - n|, |x - n - 1|\} = \min \{x - n, n + 1 - x\}$ et

$$\begin{aligned} y \in]x - r, x + r[&\iff -r < x - y < r \\ &\implies x - n - 1 \leq -r < x - y < r \leq x - n \\ &\implies n < y < n + 1 \\ &\implies y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donc $]x - r, x + r[\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On vient de montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est un ouvert, donc $\mathbb{Z}$ est un fermé.

Corrigé de l'exercice 16. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |x_n - x| < 1/4$. Donc

$$\forall n \geq n_0, |x_n - x_{n_0}| = |x_n - x_{n_0} + x - x| \leq |x_n - x| + |x_{n_0} - x| < 1/2$$

nécessairement, $\forall n \geq n_0, x_n - x_{n_0} = 0$ car $|x_n - x_{n_0}| \in \mathbb{N}$.

Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = x_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$ et, à la limite, $x = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ est fermé.

Corrigé de l'exercice 17. Si $x \in \mathring{\mathbb{Z}}$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset \mathbb{Z}$ et ceci est absurde, donc $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

Si $x \in \mathring{\mathbb{Q}}$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset \mathbb{Q}$ et ceci est absurde car entre deux réels il existe un irrationnel, donc $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathring{\mathbb{Q}}$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset \mathbb{R} \setminus \mathring{\mathbb{Q}}$ et ceci est absurde car entre deux réels il existe un rationnel, donc $\mathbb{R} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

Corrigé de l'exercice 18. 1. Soit $x \in O + A$ donc $x = x_0 + a$ avec $x_0 \in O$ et $a \in A$. Comme O est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset O$ et

$$B(x, r) = B(x_0 + a, r) = a + B(x_0, r) \subset O + A.$$

Par suite, $O + A$ est un ouvert.

2. On a $\mathbb{Z}$ est un fermé et l'ensemble $\mathbb{R} \setminus B = \underbrace{\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[}_{\text{ouvert}} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \underbrace{\left[n - \frac{1}{2n}, n + 1 - \frac{1}{2(n+1)} \right]}_{\text{ouvert}} \right)$ est un ouvert donc B est un fermé. L'ensemble $A + B$ n'est pas fermé. En effet :

$$A + B = \left\{ (m + n) - \frac{1}{2n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ k - \frac{1}{2n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

La suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = -\frac{1}{2n}$ vérifie : $x_n = \underbrace{-n}_{\in A} + \underbrace{n - \frac{1}{2n}}_{\in B} \in A + B$ et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \notin A + B$.

Corrigé de l'exercice 19. 1. a. Soit $x \in \mathring{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$ donc $x \in A$ et $\mathring{A} \subset A$.

Soit $x \in A$ et soit $r > 0$, on a $\|x - x\| = 0 < r$ donc $x \in \overline{A}$ et $A \subset \overline{A}$.

b. Si A est ouvert alors $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert de } E \\ O \subset A}} O = A \cup \left(\bigcup_{\substack{O \text{ ouvert de } E \\ O \subset A, O \neq A}} O \right) \supset A$ donc $A \subset \mathring{A}$ et par suite, $\mathring{A} = A$.

Si $\mathring{A} = A$ alors comme $\mathring{A}$ est un ouvert, A est un ouvert.

c. Si A est fermé alors $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ A \subset F}} F = A \cap \left(\bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ A \subset F, F \neq A}} F \right) \subset A$ donc $\overline{A} \subset A$ et par suite, $\overline{A} = A$.

Si $\overline{A} = A$ alors comme $\overline{A}$ est un fermé, A est un fermé.

d. Supposons $A \subset B$ et soit $x \in \mathring{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A \subset B$ donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset B$ et $x \in \mathring{B}$. Par suite $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

e. Supposons $A \subset B$ et soit $x \in \overline{A}$, donc $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ et donc $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ c-à-d $x \in \overline{B}$. Par suite $\overline{A} \subset \overline{B}$.

f. On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \implies \overline{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B} \implies \overline{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
Inversement,

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} &\implies \exists r_1 > 0, B(x, r_1) \subset A \text{ et } \exists r_2 > 0, B(x, r_2) \subset B \\ &\implies \exists r = \min(r_1, r_2) > 0, B(x, r) \subset A \cap B \\ &\implies x \in \overline{A \cap B} \end{aligned}$$

donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overline{A \cap B}$ d'où l'égalité $\overline{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

g. On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \implies \overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{B} \implies \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

h. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overset{\circ}{B} \subset \overline{A \cup B} \implies \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overline{A \cup B}$.

i. On a $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \implies \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \implies \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Inversement, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$ donc il contient $\overline{A \cup B}$ donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ d'où l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. L'inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ est stricte en effet : pour $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Q}$, on a $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$.

L'inclusion $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overline{A \cup B}$ est stricte en effet : pour $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Q}$, on a $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = \emptyset$ et $\overline{A \cup B} = \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 20. Soient E un evn et F un sev de E . Soient $(x, y) \in \overline{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $x + \lambda y \in \overline{F}$. Il existe $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}, (y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$, donc

$$\underbrace{x_n + \lambda y_n}_{\in F} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x + \lambda y.$$

Ainsi, $x + \lambda y \in \overline{F}$ d'où $\overline{F}$ est un sev de E .

Corrigé de l'exercice 21. Supposons $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ et soit $x_0 \in \overset{\circ}{F}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset F$. Soit $x \in E$.

- Si $x = 0$, alors $x \in F$.
- Si $x \neq 0$, considérons le vecteur $y = x_0 + \frac{1}{2r\|x\|}x$. On a $\|y - x_0\| = \frac{1}{2r\|x\|}\|x\| < r$ c-à-d $y \in B(x_0, r)$ donc $y \in F$ et par suite $x = 2r\|x\| \underbrace{(y - x_0)}_{\in F} \in F$.

D'où $E \subset F$ et par suite, $F = E$.

Supposons F est un ouvert de E , alors $\overset{\circ}{F} = F$ et en particulier $0 \in \overset{\circ}{F}$ c-à-d $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ donc d'après ce qui précède, $F = E$.

Corrigé de l'exercice 22. On a $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure,

$$d(x, A) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, 0 \leq \|x - a\| \leq 0 + \varepsilon.$$

Donc $x \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \exists a \in A, \|x - a\| \leq r \iff d(x, A) = 0$.

Corrigé de l'exercice 23. Posons $D = \{P \in E, P(2) = 0\}$. Soit $P \in E$ et considérons la suite $(P_n)_{n \geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $P_n = P + P(2) \left(\frac{X}{2}\right)^n$. On a $P_n(2) = P(2) - P(2) = 0$ donc $(P_n)_{n \geq 0} \in D^{\mathbb{N}}$ et

$$\|P_n - P\| = \left\| P(2) \left(\frac{X}{2}\right)^n \right\| = |P(2)| \sup_{t \in [-1, 1]} \left\| \left(\frac{t}{2}\right)^n \right\| = \frac{|P(2)|}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P$. D'où D est dense dans E .

Corrigé de l'exercice 24. Supposons H n'est pas fermé et montrons que H est dense dans E . On a $H \subset \overline{H} \subset E$ et $H \subsetneq \overline{H}$, il existe $a \in \overline{H} \setminus H$, donc $H \oplus \text{Vect}(a) \subset \overline{H}$. Mais $E = H \oplus \text{Vect}(a)$ d'où $\overline{H} = E$.

3 Continuité d'une application

Corrigé de l'exercice 25. Soit x un point de la sphère unité de E donc $\|x\| = 1$. Considérons la suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{n}{n+1}x$. On a $\|x_n\| = \frac{n}{n+1}\|x\| < 1$ donc $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs $\|x_n - x\| = \frac{1}{n+1}\|x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, la suite $(x_n)_n$ converge vers x mais la suite $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$.

Corrigé de l'exercice 26. La fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$f(x) = 0 \iff \sin(\pi x) = 0 \iff \pi x \in \pi\mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{Z}$$

donc $\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f .

Corrigé de l'exercice 27. 1. soit $(x, y) \in E^2$ et $a \in A$, on a

$$\begin{aligned} d(x, A) &\leq \|x - a\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - a\| \\ &\leq \|x - y\| + d(y, A) \quad \text{par passage à la borne inférieure} \end{aligned}$$

donc $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$. Or x et y jouent des rôles symétriques, d'où $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.

2. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, $(y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$. On a, pour tout $1 \leq i \leq p$:

$$\begin{aligned} \|\pi_i(x_1, \dots, x_p) - \pi_i(y_1, \dots, y_p)\|_{E_i} &= \|x_i - y_i\|_{E_i} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq p} \|x_i - y_i\|_{E_i} \\ &= N((x_1, \dots, x_p) - (y_1, \dots, y_p)) \end{aligned}$$

où N est la norme produit définie sur l'espace produit $E_1 \times \dots \times E_p$. D'où π_i est 1-lipshitzienne.

Corrigé de l'exercice 28. 1. Supposons f lipshitzienne sur $\mathbb{R}_+$, donc $\exists k \in \mathbb{R}_+$, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$.

- Si $k = 0$, alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ ce qui est absurde.
- Si $k \neq 0$, en particulier, pour $x = 0$ et $y = \frac{1}{4k^2}$, on aurait $\frac{1}{2k} \leq k \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4k}$ ce qui est absurde

donc f n'est pas lipshitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

2. On sait qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I est lipshitzienne si, et seulement si, f' est bornée.

Ici, la fonction $x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipshitzienne sur $\mathbb{R}$.

3. La réponse est négative. En effet : la fonction $x \mapsto x$ est lipshitzienne sur $\mathbb{R}$ mais $x \mapsto x^2$ ne l'est pas.

Corrigé de l'exercice 29. On montre que $f(r) = rf(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(r_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Par ailleurs, $f(r_n) = r_nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, à la limite et la continuité de f , on obtient $f(x) = xf(1)$. D'où $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 30. Soit $(f, g) \in E^2$.

- Pour la norme $\|\cdot\|_1$:

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| = \left| \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt \right| = \left| \int_0^1 f(t) - g(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt = \|f - g\|_1.$$

- Pour la norme $\|\cdot\|_2$:

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt} = \|f - g\|_2.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

- Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$|\Phi(f) - \Phi(g)| \leq \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| \int_0^1 dt = \|f - g\|_\infty.$$

4 Applications linéaires et multilinéaires continues

Corrigé de l'exercice 31. 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(A + \lambda B) = (A + \lambda B, (A + \lambda B)^\top) = (A + \lambda B, A^\top + \lambda B^\top) = (A, A^\top) + \lambda(B, B^\top) = \varphi(A) + \lambda\varphi(B)$$

donc φ est linéaire.

2. L'application produit matriciel $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue, car bilinéaire en dimension finie et $f = \psi \circ \varphi$, donc f est continue comme composée d'applications continues.

3. $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AA^\top = I_n\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = I_n\} = f^{-1}(\{I_n\})$ qui est, un fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue f .

Corrigé de l'exercice 32. On a $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$, donc

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det A \neq 0\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det A \in \mathbb{K}^*\} = \det^{-1}(\mathbb{K}^*).$$

$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un ouvert comme complémentaire du fermé $\{0\}$ et l'application $\det$ est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice. D'où $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert.

Corrigé de l'exercice 33. 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi_{i,j}(A + \lambda B) = (A + \lambda B)_{i,j} = A_{i,j} + \lambda B_{i,j} = \varphi_{i,j}(A) + \lambda \varphi_{i,j}(B)$$

donc $\varphi_{i,j}$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, par suite $\varphi_{i,j}$ est continue.

2. On a $\text{com } A = ((-1)^{i+j} \det(\varphi_{i,j}(A)))_{1 \leq i, j \leq n}$. Chaque application coordonnée $A \mapsto (-1)^{i+j} \det(\varphi_{i,j}(A))$ est continue car composée de deux applications continues donc l'application $A \mapsto \text{com } A$ est continue.

3. L'application transposée $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue car linéaire en dimension finie, donc

$$A \longmapsto A^\top$$

l'application $A \mapsto (\text{com } A)^\top$ est continue comme composée d'applications continues.

D'où l'application $A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com } A)^\top$ est continue comme produit d'applications continues.

Corrigé de l'exercice 34. 1. L'application φ est linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on a

$$|\varphi(f)| = |f(1)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

donc φ est continue sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2. L'application φ est linéaire. La suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ définie par $f_n(t) = (n+1)t^n$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_1 = 1, |\varphi(f_n)| = n+1 \text{ et } \frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par suite, φ n'est pas continue sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Corrigé de l'exercice 35. 1. φ est linéaire et pour tout $f \in E$, on a

$$|\varphi(f)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$$

donc φ est continue et $\|\varphi\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\varphi(f)| \leq 2$. Pour $f : t \mapsto t - \frac{1}{2}$ on a l'égalité $|\varphi(f)| = 2\|f\|_\infty$. D'où $\|\varphi\| = 2$.

2. φ est linéaire et pour tout $f \in E$, on a

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 t f(t) dt \right| \leq \int_0^1 t |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$$

donc φ est continue et $\|\varphi\| = \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_1} \leq 1$. La suite $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = t^n$ vérifie

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \quad |\varphi(f_n)| = \frac{1}{n+2} \quad \text{et} \quad \frac{|\varphi(f_n)|}{\|f_n\|_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'où $\|\varphi\| = 1$.

3. φ est linéaire et pour tout $f \in E$, on a

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) \cos(\pi t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| |\cos(\pi t)| dt \leq \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_0^1 |\cos(\pi t)|^2 dt}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Or $\int_0^1 |\cos(\pi t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (\cos(2\pi t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} + t \right]_0^1 = \frac{1}{2}$, donc $|\varphi(f)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_2$ c-à-d φ est continue et $\|\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour $f : t \mapsto \cos(\pi t)$ on a l'égalité $|\varphi(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_2$. D'où $\|\varphi\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 36. 1. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |(A.x)_i| = \left| \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \|x\|_{\infty} \leq \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right) \|x\|_{\infty}.$$

En passant au sup sur i on obtient $\|A.x\|_{\infty} \leq \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right) \|x\|_{\infty}$ c-à-d $\|A.x\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} \|x\|_{\infty}$ et par suite,

$$\inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_{\infty} \leq C \|x\|_{\infty} \right\} \leq \|A\|_{\infty}.$$

2. a. Si $A = O_{n,p}$, le résultat est clair.

Si $A \neq O_{n,p}$, il existe $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $|y_{j_0}| = 1$ et, puisque $|y_j| \leq 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $\|y\|_{\infty} = 1$. Par ailleurs,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |(A.y)_i| = \left| \sum_{j=1}^p a_{i,j} y_j \right| \leq \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| |y_j| \leq \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| = \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| \right) \|y\|_{\infty}$$

donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |(A.y)_i| \leq \|A\|_{\infty} \|y\|_{\infty}$.

b. En passant au sup sur i on obtient $\|A.y\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \leq n} |(A.y)_i| \leq \|A\|_{\infty} \|y\|_{\infty}$. Par ailleurs,

$$|(A.y)_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^p a_{i_0,j} y_j \right| = \left| \sum_{j=1}^p a_{i_0,j} \frac{|a_{i_0,j}|}{|a_{i_0,j}|} y_j \right| = \sum_{j=1}^p |a_{i_0,j}| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| = \|A\|_{\infty} \|y\|_{\infty}$$

donc $|(A.y)_{i_0}| = \|A\|_{\infty} \|y\|_{\infty}$ et par suite, $\|A.y\|_{\infty} = \|A\|_{\infty} \|y\|_{\infty}$.

3. D'après la question précédente, on a : $\|A\|_{\infty} = \frac{\|A.y\|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}} \leq \inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_{\infty} \leq C \|x\|_{\infty} \right\}$ donc

$$\inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_{\infty} \leq C \|x\|_{\infty} \right\} \geq \|A\|_{\infty}$$

Finalement, $\|A\|_{\infty} = \inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_{\infty} \leq C \|x\|_{\infty} \right\}$.

5 Compacité

Corrigé de l'exercice 37. S est bornée et $S = f^{-1}(\{1\})$ où $f : x \mapsto \|x\|$, donc S est un fermé comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue f . Comme E est de dimension finie, alors S est un compact.

Corrigé de l'exercice 38. 1. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. On a, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f_m(t) - f_n(t)| &= |e^{2im\pi t} - e^{2in\pi t}| \\ &= \left| e^{i(m+n)\pi t} (e^{i(m-n)\pi t} - e^{-i(m-n)\pi t}) \right| \\ &= 2 \left| \sin((m-n)\pi t) \right| \leq 2, \end{aligned}$$

et, l'égalité étant réalisée pour $t = \frac{1}{2|m-n|} \in [0, 1]$, donc $\|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_m(t) - f_n(t)| = 2$.

2. Supposons $(f_n)_n$ possède une valeur d'adhérence $f \in E$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$, donc

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m > n \implies \|f_{\varphi(m)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty = 2 \quad (*).$$

à la limite dans $(*)$ quand $m \rightarrow +\infty$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty = 2$, et ceci est absurde puisque $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ ne possède aucune valeur d'adhérence.

3. Notons S la sphère unité de E . On a $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |e^{2in\pi t}| = 1$ donc $(f_n)_n \in S^\mathbb{N}$ et ne possède aucune valeur d'adhérence donc S n'est pas compact.

Corrigé de l'exercice 39. 1. Soit $(x_n)_n$ une suite de $A + B$ donc $x_n = a_n + b_n$ avec $(a_n)_n \in A^\mathbb{N}$ et $(b_n)_n \in B^\mathbb{N}$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in A$. La suite $(b_{\varphi(n)})_n$ possède une valeur d'adhérence dans B donc il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $b_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b \in B$. Par ailleurs

$$x_{\varphi(\psi(n))} = a_{\varphi(\psi(n))} + b_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + b \in A + B$$

c-à-d $a + b$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$. Ainsi, $A + B$ est compact.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite de $A + B$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in E$. On écrit $x_n = a_n + b_n$ avec $(a_n)_n \in A^\mathbb{N}$ et $(b_n)_n \in B^\mathbb{N}$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in A$ donc

$$b_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a - x$$

comme B est fermé, $a - x = b \in B$ et donc $x = a + b \in A + B$. D'où $A + B$ est fermé.

$A + B$ n'est pas, en général, un compact. Il suffit de prendre $B = E$ qui est un fermé mais $A + E$ n'est pas compact car n'est pas borné.

Corrigé de l'exercice 40. L'ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un fermé car c'est le complémentaire de l'ensemble des matrices inversibles qui est un ouvert.

La suite $(A_k)_k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $A_k = \text{diag}(k, 0, \dots, 0)$ est non inversible et $\|A_k\|_2 = k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$, donc l'ensemble des matrices non inversibles n'est pas borné et par suite, n'est pas compact.

Corrigé de l'exercice 41. Soit $x \in E$. L'application $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur le compact K , d'après

$$y \mapsto \|y - x\|$$

le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes donc il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \inf_{y \in K} f(y)$

c-à-d $\|x_0 - x\| = \inf_{y \in K} \|y - x\|$. Ainsi, il existe $x_0 \in K$ tel que $d(x, K) = \|x_0 - x\|$.

Corrigé de l'exercice 42. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_n$ de F telle que $\|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, F)$. En particulier, la suite $(\|x - a_n\|)_n$ est bornée et on a de même pour la suite $(a_n)_n$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n\| \leq \underbrace{\|x - a_n\|}_{\text{bornée}} + \|x\|.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie, on peut extraire de $(a_n)_n$ une suite convergente $(a_{\varphi(n)})_n$. Notons a sa limite, on a alors

$$a \in F \text{ car } F \text{ fermé et } d(x, F) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\| = \|x - a\|.$$

Corrigé de l'exercice 43. 1. Supposons que f admet au moins deux points fixes x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$). On a

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| = \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|$$

ce qui est absurde donc f possède au plus un point fixe.

2. La fonction f est lipschitzienne donc continue, donc l'application $g : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue

$$x \longmapsto \|f(x) - x\|$$

comme composée d'applications continues. Comme K est compact, d'après le théorème des bornes atteintes, g est bornée et atteint ses bornes donc il existe $c \in K$ tel que $g(c) = \inf_{x \in K} g(x)$ c-à-d il existe $c \in K$ tel que $\|f(x) - x\| \geq \|f(c) - c\|$ pour tout $x \in K$.

3. Si $f(c) \neq c$ alors $\|f(c) - c\| > \|f(f(c)) - f(c)\| = g(f(c))$ ce qui est absurde car $\|f(c) - c\|$ est la valeur minimale de g sur K . Par suite, $f(c) = c$ et c est un point fixe de f .

6 Connexité par arcs

Corrigé de l'exercice 44. 1. $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

- Première méthode : On a

$$\begin{aligned} U &= \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \\ &= \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{f(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \text{ où } f : \mathbb{R} \longrightarrow U \text{ définie par } f(\theta) = e^{i\theta} \\ &= f(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Comme f est continue et $\mathbb{R}$ est connexe par arcs alors U est connexe par arcs comme image réciproque d'un connexe par arcs par une application continue.

- Deuxième méthode : Soit $(u, v) \in U^2$ donc $u = e^{i\alpha}$ et $v = e^{i\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

L'application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$ est un chemin inscrit dans U d'extrémités u et v :

$$t \longmapsto e^{i(t\alpha + (1-t)\beta)}$$

$\gamma(0) = e^{i\beta} = v$, $\gamma(1) = e^{i\alpha} = u$. D'où U est connexe par arcs.

2. U n'est pas étoilé : $\forall a \in U, \exists x \in U$ tel que $[a, x]$ n'est pas inclus dans U . (prendre $x = -a$)

Corrigé de l'exercice 45. Soit $(u, v) \in (\mathbb{C}^*)^2$.

- Si $0 \notin [u, v]$, l'application $\gamma : t \longmapsto tu + (1-t)v$ est un chemin inscrit dans $\mathbb{C}^*$ d'extrémités u et v .
- Supposons $0 \in [u, v]$ et soit $w \notin [u, v]$. L'application

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2tw + (1-2t)u & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (2-2t)w + (2t-1)v & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin inscrit dans $\mathbb{C}^*$ d'extrémités u et v .

D'où $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 46. Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Supposons $\mathbb{Q}$ est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{Q}$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Comme γ est continue, par le TVI, $\gamma([0, 1])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donne l'existence d'un irrationnel α entre a et b donc $\alpha \in \gamma([0, 1]) \subset \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. D'où $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 47. 1. Soit $A, B \in \mathcal{D}$, on écrit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$.

L'application

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{D} \\ t &\longmapsto tA + (1-t)B = \text{diag}(t\mu_1 + (1-t)\lambda_1, \dots, t\mu_n + (1-t)\lambda_n) \end{aligned}$$

est un chemin inscrit dans $\mathcal{D}$ d'extrémités A et B : $\gamma(0) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = A$ et $\gamma(1) = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = B$. Par suite, $\mathcal{D}$ est convexe.

2. On a $I_n \in \Omega$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \Omega$. L'application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \Omega$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ ta_{i,j} & \text{si } i < j \\ r_j^t e^{it\theta_j} & \text{si } i = j \text{ où } a_{j,j} = r_j e^{i\theta_j} \end{cases}$$

est un chemin inscrit dans Ω d'extrémités I_n et A : $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$. (avec la convention $0^0 = 1$)

Par transitivité, on peut joindre deux éléments quelconques de Ω . Par suite, Ω est connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 48. Supposons $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. L'application $\det$ est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice, donc $\det(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs. Par ailleurs, $\det(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs car n'est pas un intervalle, ce qui est absurde. D'où $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Corrigé de l'exercice 49. 1. Il est clair que A est convexe donc connexe par arcs.

2. L'inclusion $g(A) \subset f'(I)$ découle du théorème des accroissements finis. D'autre part, soit $z = f'(a) \in f'(I)$. I étant un ouvert (car $I = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ où $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = y - x$), donc il existe $r > 0$ tel que $]a - r, a + r[\subset I$. On pose $a_n = a - \frac{r}{n+1}$. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de I qui converge vers a . Comme f est dérivable en a , $f'(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a, a_n)$. Or $g(a, a_n) \in \overline{g(A)}$, donc $z \in \overline{g(A)}$. D'où $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

3. $g(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et son adhérence $\overline{g(A)}$ est l'intervalle fermé qui a les mêmes extrémités. Dans ces conditions, $f'(I)$ ne peut être qu'un intervalle.

Corrigé de l'exercice 50. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ donc $(x, y) \in X$ et X est connexe par arcs car convexe. Par ailleurs $f(x) - f(y) = g(x, y) \neq 0$ car f injective, donc $g(X) \subset \mathbb{R}^*$. La fonction g est continue car f l'est donc $g(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, nécessairement, $g(X) \subset \mathbb{R}_+^*$ ou $g(X) \subset \mathbb{R}_-^*$ cela veut dire que $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$. D'où f est strictement monotone.

Corrigé de l'exercice 51. 1. Soient $(a, b) \in A \times B$ et $(a', b') \in A \times B$. Il existe un chemin φ inscrit dans A d'extrémités a et a' : $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = a'$. De même, Il existe un chemin ψ inscrit dans B d'extrémités b et b' : $\psi(0) = b$, $\psi(1) = b'$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow A \times B \\ t &\longmapsto (\varphi(t), \psi(t)) \end{aligned}$$

On a γ est un chemin inscrit dans $A \times B$ et d'extrémités (a, b) et (a', b') :

$$\gamma(0) = (\varphi(0), \psi(0)) = (a, b), \quad \gamma(1) = (\varphi(1), \psi(1)) = (a', b').$$

D'où $A \times B$ est connexe par arcs.

2. L'application $f : E \times E \longrightarrow E$ est continue et on a $A + B = f(A \times B)$ donc $A + B$ est connexe par arcs comme image directe du connexe par arcs $A \times B$ par l'application continue f .

3. Supposons $A \cap B \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in A \cap B$. Soit x, y dans $A \cup B$.

- Si x, y dans A , le problème est résolu.

- Si x, y dans B , le problème est résolu.
- Si $x \in A$ et $y \in B$. Alors puisque A est connexe par arcs, il existe un chemin γ_1 inscrit dans A d'extrémités x_0 et x : $\gamma_1(0) = x_0$, $\gamma_1(1) = x$. De même, puisque B est connexe par arcs, il existe un chemin γ_2 inscrit dans B d'extrémités x_0 et y : $\gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_2(1) = y$. L'application

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un chemin inscrit dans $A \cup B$ d'extrémités x et y : $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

- De même si $x \in B$ et $y \in A$.

D'où $A \cup B$ est connexe par arcs.