

Espaces vectoriels normés

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

1	Espaces normés	1
2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	4
3	Topologie d'un espace vectoriel normé	5
4	Etude locale d'une application, continuité	8
5	Applications linéaires et multilinéaires continues	10
6	Compacité	12
7	Connexité par arcs	13

Dans ce chapitre est sauf indication contraire, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -ev.

1 Espaces normés

Normes et distances

Définition 1.1.

norme

On appelle **norme** sur E toute application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. Séparation : $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \implies x = 0_E$.
2. Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé**.

Exemple 1.1 (Normes usuelles).

■ Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

■ Normes usuelles sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose :

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

■ Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b |f(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes¹ sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$.

■ Norme usuelle sur² $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$. Soit $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in X} |f(t)|.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ appelée norme de la **convergence uniforme** ou norme **infinie**.

Remarque 1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz : rappel MPSI).

■ Pour des sommes : soit $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}^n$. Alors $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

■ Avec des intégrales : soit f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$. Alors $\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

Dans la suite, le couple $(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé ($\mathbb{K}$ -evn).

Proposition 1.1.

propriétés d'une norme

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$.

2. $\forall x \in E, \|-x\| = \|x\|$.

3. $\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ appelée inégalité triangulaire renversée.

Définition 1.2.

vecteur unitaire

On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** lorsque $\|x\| = 1$.

Proposition 1.2.

norme produit

Soit $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p evn et $E = E_1 \times \dots \times E_p$. L'application N définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in E, \quad N(x) = \max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_{E_i}$$

est une norme sur E appelée **norme produit**.

Définition 1.3.

distance

L'application d définie sur $E \times E$ par $d(x, y) = \|x - y\|$ est appelée la **distance associée** à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.4.

distance à une partie

Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle la **distance** de x à A la quantité¹ (positive) :

$$d(x, A) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Lorsqu'il existe $a_0 \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a_0\|$, on dit que la distance de x à A est **atteinte** en a_0 .

1. Comme A est non vide, l'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$, donc admet une borne inférieure.

1. $\|\cdot\|_1$ appelée norme de la **convergence en moyenne** et $\|\cdot\|_2$ appelée norme de la **convergence en moyenne quadratique**.
2. Soit X un ensemble. $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ est l'espace des fonctions bornées de X dans $\mathbb{K}$.

Remarque 1.2 (Caractérisation séquentielle de la borne inférieure : rappel MPSI).

■ Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}$ admettant une borne inférieure et δ un **minorant** de F . Alors

$$\delta = \inf F \iff \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta.$$

Ainsi

$$d(x, A) = \alpha \iff \begin{cases} \forall a \in A, \quad \|x - a\| \geq \alpha \\ \text{et} \\ \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad \|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \end{cases}.$$

Exemple 1.2. ■ Dans $\mathbb{R}$, on a $d(1, [0, 1[) = 0$.

Normes équivalentes

Définition 1.5.

normes équivalentes

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont **équivalentes**¹ si : $\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.

1. Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

Théorème 1.1.

équivalence des normes en dimension finie

Sur un même $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemple 1.3. ■ Dans $\mathbb{K}^n$, on a $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty}$, $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_{\infty}$ et $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$.

Boules dans un espace vectoriel normé

Définition 1.6.

boules, sphère

Soit $a \in E$ et $r > 0$.

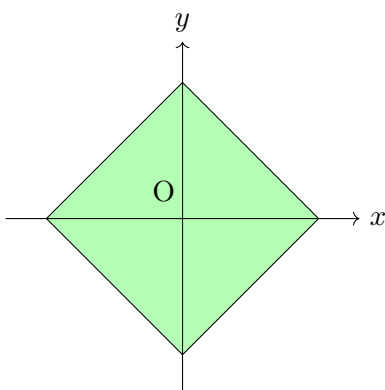
1. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r de E l'ensemble $B(a, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in E, \quad \|x - a\| < r\}$.

2. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r de E l'ensemble $B_f(a, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in E, \quad \|x - a\| \leq r\}$.

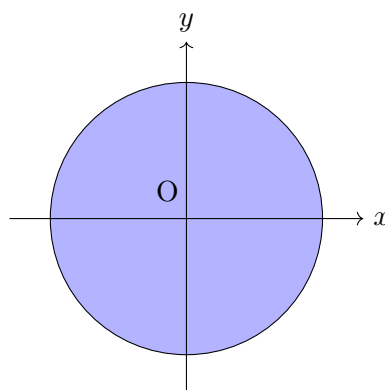
3. On appelle **sphère** de centre a et de rayon r de E l'ensemble $S(a, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in E, \quad \|x - a\| = r\}$.

Lorsque $r = 1$ et $a = 0$, on parle de **boule unité fermée**, **boule unité ouverte** et **sphère unité**.

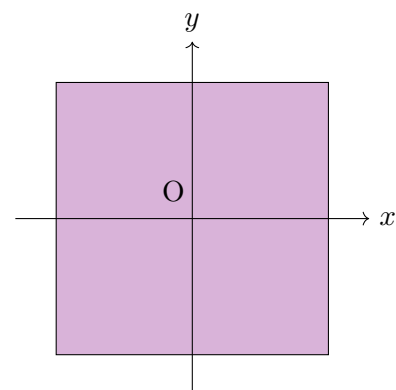
Boule unité fermé pour
la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$



Boule unité fermé pour
la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^2$



Boule unité fermé pour
la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2$



Définition 1.7.**bornitude**

1. On dit qu'une partie A de E est **bornée**¹ si $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \|x\| \leq M}$.
2. Soit X un ensemble. On dit que $f : X \rightarrow E$ est **bornée** si $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M}$.
3. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est **bornée** si $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M}$.

1. A est bornée si, et seulement si, A est incluse dans une boule (ouverte ou fermée).

Exemple 1.4. ■ L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1 \text{ et } y = x \arctan x\}$ est bornée. En effet : soit $(x, y) \in A$. On a $|x| \leq 1$ et $|y| = |x \arctan x| \leq \pi/2$, donc $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq \min(1, \pi/2) = 1$. Par suite, $A \subset B_f((0, 0), 1)$.

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Convergence

Définition 2.1.**suite convergente**

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E **converge**¹ s'il existe $\ell \in E$ tel que la suite réelle $(\|x_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 :

$$\boxed{\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon}.$$

On note alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. L'élément ℓ est **unique** et appelé la **limite** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et celle-ci est noté $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **divergente** si elle ne converge pas. Ceci peut se traduire par la négation de la définition.

Exemple 2.1. ■ Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on considère la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\|A_n - I_2\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$: la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers I_2 pour $\|\cdot\|_2$.

Théorème 2.1.**caractérisation séquentielle des normes équivalentes**

Deux normes sont équivalentes si, et seulement si, toute suite qui converge pour l'une converge pour l'autre (avec la même limite).

Théorème 2.2.**convergence dans un espace produit**

Soit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ l'espace produit des evn $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(p)})$ où $x_n^{(i)} \in E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a équivalence entre :

- (i) $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E$;
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_n^{(i)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_i$.

Proposition 2.1.**convergence dans un espace de dimension finie**

Supposons E de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $x_n = \sum_{i=1}^p x_n^{(i)} e_i$. On a équivalence entre :

- (i) $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i \in E$;
- (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_n^{(i)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_i$.

Exemple 2.2. ■ Soit $E = \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$ la base canonique de E et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E :

$$A_n = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j}^{(n)} E_{i,j}.$$

- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in E$ si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket$, la suite $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.
- En cas de convergence, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{i,j}^{(n)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$.

Valeur d'adhérence

Définition 2.2.

suite extraite

On appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 2.1. ■ L'application φ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. En particulier, $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Définition 2.3.

valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E toute limite d'une sous-suite convergente de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 2.2.

1. Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, toute suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
2. Toute suite convergente possède¹ une unique valeur d'adhérence : sa limite.

1. La réciproque est fausse.

Remarque 2.2. ■ Une suite possédant au moins deux valeurs d'adhérences (ou n'en possédant aucune) est divergente.

Théorème 2.3.

Bolzano-Weierstrass (cas réel ou complexe)

Toute suite bornée de réels ou de complexes possède au moins une valeur d'adhérence.

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

$(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$ -evn.

Voisinage, ouvert, fermé

Définition 3.1.

voisinage d'un point

On appelle **voisinage** d'un point a de E toute partie V de E vérifiant $\boxed{\exists r > 0, B(a, r) \subset V}$.

Exemple 3.1. ■ Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\exists r > 0,]a - r, a + r[\subset V$.

■ Toute boule de centre $a \in E$ est un voisinage de a .

Proposition 3.1.

opérations

1. Toute intersection **finie**¹ de voisinages de $a \in E$ est un voisinage de a .
2. Toute réunion de voisinages de $a \in E$ est un voisinage de a .

1. Une intersection infinie de voisinages de a n'est pas nécessairement un voisinage de a .

Définition 3.2.

ouvert, fermé

1. Une partie U de E est dite **ouvert** si U est voisinage de chacun de ces points : $\boxed{\forall a \in U, \exists r > 0, B(a, r) \subset U}$.
2. Une partie F de E est dite **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

Exemple 3.2. ■ $\emptyset$ et E sont des ouverts et des fermés de E .

■ Tout intervalle ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp. fermé).

Proposition 3.2.

topologie des boules

1. Toute boule ouverte de E est un ouvert.
2. Toute boule fermée de E est un fermé.

Proposition 3.3.

opérations

1. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
 2. Toute intersection **finie**¹ d'ouverts est un ouvert.
 3. Toute intersection de fermés est un fermé.
 4. Toute réunion **finie** de fermés est un fermé.
1. Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

Exemple 3.3. ■ $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{]n, n+1[}_{\text{ouvert}}$.

■ Toute sphère de E est un fermé : c'est l'intersection de deux fermés.

Théorème 3.1.

topologie dans un espace produit

Soit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ l'espace produit des evn $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$.

1. Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, U_i est un ouvert de E_i , alors $U = U_1 \times \dots \times U_p$ est un ouvert de E .
2. Si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, F_i est un fermé de E_i , alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est un fermé de E .

Théorème 3.2.

caractérisation séquentielle d'un fermé

$$F \text{ est un fermé de } E \iff \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \in E \implies a \in F \right).$$

Exemple 3.4. ■ Les singletons sont des fermés.

■ Toute partie finie de E est un fermé.

Intérieur, adhérence, frontière

X désigne une partie de E .

Définition 3.3.

point intérieur, intérieur d'une partie

1. On dit qu'un point a de E est **intérieur** à X si, X est un voisinage de a .
2. On appelle alors **intérieur** de X l'ensemble, noté $\overset{\circ}{X}$, des points intérieurs à X :

$$\overset{\circ}{X} = \left\{ x \in E, \exists r > 0, \text{ tel que } B(x, r) \subset X \right\}.$$

Proposition 3.4.

caractérisation de l'intérieur

$\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans X : $\overset{\circ}{X} = \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert de } E \\ O \subset X}} O$.

Exemple 3.5. ■ L'intérieur d'un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide est l'intervalle ouvert de mêmes extrémités.

Définition 3.4.

point adhérent, adhérence d'une partie

1. On dit qu'un point a de E est **adhérent** à X si $\forall r > 0, B(a, r) \cap X \neq \emptyset$.
2. On appelle alors **adhérence** de X l'ensemble, noté $\overline{X}$, des points adhérents à X :

$$\overline{X} = \left\{ x \in E, \forall r > 0, \exists a \in X, \text{ tel que } \|x - a\| \leq r \right\}.$$

Proposition 3.5.**caractérisation de l'adhérence**

$\overline{X}$ est le plus petit fermé de E contenant X : $\overline{X} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé de } E \\ X \subset F}} F$.

Exemple 3.6. ■ L'adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide est l'intervalle fermé de mêmes extrémités.

■ 0 est adhérent à $\mathbb{C}^*$: pour tout $r > 0$, le complexe $z = i\frac{r}{2} \in \mathbb{C}^*$ vérifie $|0 - z| < r$.

Proposition 3.6.**lien entre intérieur et adhérence**

$$1. \quad E \setminus \overline{X} = \overset{\circ}{E} \setminus \overset{\circ}{X} \quad \left| \quad 2. \quad E \setminus \overset{\circ}{X} = \overline{E} \setminus \overline{X} \right.$$

Théorème 3.3.**caractérisation séquentielle des points adhérents**

$$a \in \overline{X} \iff \left(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \right).$$

Exemple 3.7 ($\inf A$ et $\sup A$ sont des points adhérents à A).

■ Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée alors, $\sup A \in \overline{A}$. En effet : par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup A$. Donc $\sup A \in \overline{A}$.

■ De même, si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée alors, $\inf A \in \overline{A}$.

Définition 3.5.**frontière**

On appelle **frontière** de X , l'ensemble défini par ¹ : $\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$.

1. La frontière d'une partie est un fermé : c'est l'intersection de deux fermés.

Exemple 3.8. ■ $\text{Fr}([a, b[) = [a, b] \setminus]a, b[= \{a, b\}$.

■ La frontière d'une boule (ouverte ou fermée) est la sphère de mêmes centre et rayon.

Parties denses

X désigne une partie de E .

Définition 3.6.**partie dense**

On dit que X est **dense** dans E si $\overline{X} = E$. Cela signifie que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists a \in X, \|x - a\| \leq \varepsilon$.

Théorème 3.4.**caractérisation séquentielle de la densité**

$$\overline{X} = E \iff \left(\forall x \in E, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \right).$$

Exemple 3.9. ■ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suites de rationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ converge vers x .

■ $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suites d'irrationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n}$ converge vers x .

Topologie relative

X désigne une partie de E .

Définition 3.7.**voisinage, ouvert et fermé relatif**

1. Une partie U de X est un **voisinage relatif** de $x \in X$ s'il existe V , voisinage de x dans E , tel que $U = V \cap X$.
2. Une partie O de X est un **ouvert relatif à X** s'il existe W , ouvert de E , tel que $O = W \cap X$.
3. Une partie F de X est un **fermé relatif à X** s'il existe F' , fermé de E , tel que $F = F' \cap X$.

Exemple 3.10. ■ $[0, 1]$ est un voisinage de 0 relatif à $\mathbb{R}_+$: $[0, 1] = [-1, 1] \cap \mathbb{R}_+$.

■ $]1, 2]$ est un ouvert relatif à $[1, 2]$: $]1, 2] = [1, 2] \cap]1, 3[$.

■ $]0, 1]$ est un fermé relatif à $\mathbb{R}_+^*$: $]0, 1] = \mathbb{R}_+^* \cap [0, 1]$.

Proposition 3.7.

caractérisation séquentielle d'un fermé relatif

Soit F une partie de X . On a équivalence entre :

- (i) F est un fermé relatif à X ;
- (ii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in X \implies \ell \in F$.

Exemple 3.11. ■ L'ensemble des matrices diagonales à coefficients > 0 est un fermé relatif à $\mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ mais pas un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

4 Etude locale d'une application, continuité

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux $\mathbb{K}$ -evn.

Limite d'une application

Soit X une partie de E et a un point adhérent à X .

Définition 4.1.

limite

On dit que $f : X \longrightarrow F$ **tend** vers $\ell \in F$ en a si $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon}$.
On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. L'élément ℓ est unique et appelé la **limite** de f en a et celle-ci est noté $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Définition 4.2.

1. On dit que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ **tend** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a si

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \implies f(x) \geq M \text{ (resp. } f(x) \leq M \text{)}}.$$

2. Lorsque $E = \mathbb{R}$, On dit que $f : X \longrightarrow F$ **tend** vers $\ell \in F$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq M \text{ (resp. } x \leq M \text{)} \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon}.$$

3. Lorsque X est non bornée, On dit que $f : X \longrightarrow F$ **tend** vers $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E \rightarrow +\infty$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \|x\|_E \geq M \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon}.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \ell$.

Exemple 4.1. ■ Soit $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$. On a $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|_2 \exp(-\|(x, y)\|_2^2) \xrightarrow{\|(x, y)\|_2 \rightarrow +\infty} 0$, donc $\lim_{\|(x, y)\|_2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$.

Théorème 4.1.

caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f : X \longrightarrow F$. $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \right)}$.

Exemple 4.2. ■ $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$ car $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $f\left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.

Proposition 4.1.**limite dans un espace produit**

Soit $F = F_1 \times \dots \times F_p$ l'espace produit des evn $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $f : X \longrightarrow F$. Pour tout $x \in X$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ où $f_i(x) \in F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a équivalence entre :

- (i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in F$; (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_i$.

Proposition 4.2.**limite dans un espace de dimension finie**

Supposons F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Soit $f : X \longrightarrow F$ telle que $f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x)e_i$ pour tout $x \in X$. On a équivalence entre :

- (i) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell = \sum_{i=1}^p \ell_i e_i \in F$; (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_i$.

Continuité d'une application

Soit X une partie de E et a un point de X .

Définition 4.3.**continuité**

On dit que $f : X \longrightarrow F$ est **continue en a** si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$.
On dit que f est **continue sur X** si f est continue en tout point de X .

Théorème 4.2.**caractérisation séquentielle de la continuité**

Soit $f : X \longrightarrow F$. f continue en $a \iff \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) \right)$.

Proposition 4.3.**continuité dans un espace produit**

Soit $F = F_1 \times \dots \times F_p$ l'espace produit des evn $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ et $f : X \longrightarrow F$. Pour tout $x \in X$, on écrit $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$ où $f_i(x) \in F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a équivalence entre :

- (i) f est continue en a ; (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i$ est continue en a .

Proposition 4.4.**continuité dans un espace de dimension finie**

Supposons F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Soit $f : X \longrightarrow F$ telle que $f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x)e_i$ pour tout $x \in X$. On a équivalence entre :

- (i) f est continue en a ; (ii) $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i$ est continue en a .

Théorème 4.3.**continuité par l'image réciproque**

Soit $f : X \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i) f est continue ;
(ii) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif¹ à X ;
(iii) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif à X .

1. Si f est définie sur E tout entier, les notions d'ouvert et fermé relatifs coïncident avec les notions d'ouvert et fermé de E .

Exemple 4.3. ■ Le demi-pan $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car $P = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ où f est l'application continue définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x$.

Théorème 4.4.**prolongement d'une égalité par densité**

Si $f, g : E \rightarrow F$ sont continues, égales sur une partie X dense dans E , alors f et g sont égales sur E .

Applications lipschitziennes, applications uniformément continues

Soit X une partie de E .

Définition 4.4.**application lipschitzienne**

On dit que $f : X \rightarrow F$ est **lipschitzienne** sur X si $\boxed{\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in X^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E}$.

Exemple 4.4. ■ La norme $\|\cdot\|_E$ est 1-lipschitzienne sur E via l'inégalité triangulaire renversée.

■ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- f est lipschitzienne sur I si, et seulement si, f' est bornée sur I .
- En particulier, si I est un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors f est lipschitzienne sur I .

Définition 4.5.**continuité uniforme**

On dit que $f : X \rightarrow F$ est **uniformément continue** sur X si¹

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in X^2, \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon}.$$

1. Remarquons que, dans la définition, δ ne dépend que de ε .

Exemple 4.5. ■ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a l'inégalité suivante : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour $\delta = \varepsilon^2$, on a pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|x - y| \leq \varepsilon^2 \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \varepsilon$.

Proposition 4.5.**lien entre la continuité, continuité uniforme et lipschitzienité**

Soit $f : X \rightarrow F$. On a $\boxed{f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue}}$.

5 Applications linéaires et multilinéaires continues

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux $\mathbb{K}$ -evn.

Continuité des applications linéaires**Théorème 5.1.****caractérisation des applications linéaires continues**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence entre :

- (i) f continue sur E ; (ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

Exemple 5.1. ■ L'application linéaire $\varphi : (\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue. En effet :

$$f \mapsto \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt$$

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K}), |\varphi(f)| \leq \int_0^\pi |f(t)| |\sin(t)| dt \leq \left(\int_0^\pi |\sin(t)| dt \right) \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.$$

Théorème 5.2.**linéarité en dimension finie**

Toute application linéaire au départ d'un espace de dimension finie est continue¹.

1. Ainsi, lorsque l'espace E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Exemple 5.2. ■ Les applications $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont continues.

$$\begin{array}{ccc} A & \mapsto & \text{Tr}(A) \\ A & \mapsto & A^\top \end{array}$$

Remarque 5.1 (Continuité des applications polynomiales).

■ Supposons E de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

- f est dite **polynomiale** si $f = \varphi \circ \phi$ avec $\varphi : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ polynomiale et $\phi : E \rightarrow \mathbb{K}^p$.

$$x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_p)$$
- Une telle application est continue : c'est la composée de deux applications continues.

Exemple 5.3. ■ L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue car polynomiale en les coefficients de la matrice.

$$A \mapsto \det(A)$$

Continuité des applications multilinéaires

Théorème 5.3. caractérisation des applications multilinéaires continues

Soit $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})_{1 \leq i \leq p}$ des evn et $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ multilinéaire. On a équivalence entre :

- (i) f continue sur $E_1 \times \dots \times E_p$;
- (ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$.

Théorème 5.4. continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Toute application multilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies est continue.

Exemple 5.4. ■ L'application produit matriciel $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.

$$(A, B) \mapsto AB$$

Norme d'une application linéaire continue

Définition 5.1. norme subordonnée (cas vectoriel)

L'application $\| \cdot \|$ définie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ par 1 : $\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \|u\| = \inf \left\{ C > 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E \right\}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée **norme subordonnée** (ou **norme d'opérateur**) aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.

1. $\{C > 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E\}$ est une partie non vide (car u est continue) de $\mathbb{R}_+$ donc admet une borne inférieure.

Proposition 5.1.

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$.

Exemple 5.5. ■ L'application $\varphi : (\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire continue.

$$f \mapsto \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt$$

De plus $\forall f \in \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{K}), |\varphi(f)| \leq 2 \|f\|_\infty$ donc $\|\varphi\| \leq 2$. Pour $f = 1$, on a $\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|} = 2 \leq \|\varphi\|$. D'où $\|\varphi\| = 2$.

Définition 5.2.**norme subordonnée (cas matriciel)**

On munit $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|_n$ et $\mathbb{K}^p$ d'une norme $\|\cdot\|_p$. L'application $\| \cdot \|$ définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par¹ :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \|A\| = \inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_n \leq C\|x\|_p \right\}$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée **norme subordonnée** (ou **norme d'opérateur**) aux normes $\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_p$.

1. $\{C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_n \leq C\|x\|_p\}$ est une partie non vide (car $x \mapsto A.x$ est linéaire en dimension finie donc continue) de $\mathbb{R}_+$ donc admet une borne inférieure.

Exemple 5.6. ■ On munit $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ de la norme usuelle $\|\cdot\|_1$. Alors la norme usuelle $\|\cdot\|_1$ définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \|A\|_1 = \inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_1 \leq C\|x\|_1 \right\}.$$

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, on a

$$\|A.x\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^p |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^p |x_j| \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = \left(\sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \|x\|_1 = \|A\|_1 \|x\|_1.$$

Donc $\inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_1 \leq C\|x\|_1 \right\} \leq \|A\|_1$.

- D'autre part, il existe $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$. Soit e_{j_0} le j_0 -ème vecteur de base canonique de $\mathbb{K}^p$. Alors

$$\|e_{j_0}\|_1 = 1 \text{ et } \|A.e_{j_0}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \left(\sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \|e_{j_0}\|_1.$$

Donc $\inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_1 \leq C\|x\|_1 \right\} \geq \|A\|_1$. D'où $\|A\|_1 = \inf \left\{ C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^p, \|A.x\|_1 \leq C\|x\|_1 \right\}$.

Théorème 5.5.**caractérisation de la norme subordonnée**

1. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|A.x\|_n = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|A.x\|_n = \sup_{x \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}} \frac{\|A.x\|_n}{\|x\|_p}.$$

Proposition 5.2.**sous-multiplicativité de la norme subordonnée**

Soit E, F et G trois evn. Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et on a $\|v \circ u\| \leq \|v\| \times \|u\|$.

6 Compacité

E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -evn.

Partie compacte**Définition 6.1.****partie compacte**

On dit qu'une partie K de E est compacte si toute suite de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K .

Exemple 6.1. ■ Dans $\mathbb{R}$, le segment $[a, b]$ est compact³. ■ Dans $\mathbb{C}$, le disque fermé $D_f(0, r)$ est compact⁴.

3. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel).

4. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas complexe).

Proposition 6.1.**propriétés**

1. Tout compact est ¹ fermée et bornée.
 2. Tout fermé relatif d'un compact est compact.
 3. Tout produit fini de compacts est compact.
1. La réciproque est fausse en général.

Théorème 6.1.**compacité en dimension finie**

En dimension finie, les compacts sont exactement les fermés bornés.

Exemple 6.2. ■ En dimension finie, les boules fermées sont compacts.

Théorème 6.2.**Bolzano-Weierstrass en dimension finie**

En dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire 6.1.**fermeture d'un sev en dimension finie**

Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

Théorème 6.3.**CNS de convergence d'une suite d'un compact**

Une suite d'un compact est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Continuité et compacité**Théorème 6.4.****image continue d'un compact**

L'image directe d'un compact par une application continue est compact.

Exemple 6.3. ■ Si K_1 et K_2 sont deux compacts de E , alors $K_1 + K_2$ est un compact de E . En effet : $K_1 + K_2 = \varphi(K_1 \times K_2)$ où $\varphi : E \times E \rightarrow E$, $(x, y) \mapsto x + y$ qui est une application continue et $K_1 \times K_2$ est compact.

Théorème 6.5.**théorème des bornes atteintes**

Soit K un compact de E et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 6.6.**Heine**

Soit K un compact de E et $f : K \rightarrow F$ continue. Alors f est uniformément continue sur K .

7 Connexité par arcs

E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -evn et X une partie de E .

Partie convexe, partie étoilée**Définition 7.1.****segment, partie convexe**

1. On appelle **segment d'extrémités** $x \in E$ et $y \in E$ l'ensemble $[x, y] \stackrel{\text{déf}}{=} \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$.
2. On dit que X est **convexe** si $\forall (x, y) \in X^2, [x, y] \subset X$ c-à-d : $\forall (x, y) \in X^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in X$.

Exemple 7.1 (Convexité des boules).

■ Toute boule (ouverte ou fermé) de E est convexe. En effet : soit x et y dans $B_f(a, r)$ (boule fermé par exemple) et $t \in [0, 1]$. On a :

$$\|tx + (1-t)y - a\|_E = \|tx - ta + ta + (1-t)y - a\|_E = \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\|_E \leq t\|x-a\|_E + (1-t)\|y-a\|_E \leq tr + (1-t)r = r.$$

Donc $tx + (1-t)y \in B_f(a, r)$. Ainsi $B_f(a, r)$ est convexe.

Proposition 7.1.convexes de $\mathbb{R}$

Les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles¹ de $\mathbb{R}$.

1. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si : $\forall (x, y) \in I^2, x < t < y \implies t \in I$.

Définition 7.2.

partie étoilée

1. Soit $a \in X$. On dit que X est **étoilée par rapport à a** si¹ $\forall x \in X, [a, x] \subset X$.

2. On dit que X est **étoilée** si $\exists a \in X, \forall x \in X, [a, x] \subset X$.

1. Une partie est convexe si, et seulement si, elle est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Exemple 7.2. ■ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ est étoilée par rapport à 0.

■ Les parties étoilées de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Partie connexe par arcs**Définition 7.3.**

chemin

On appelle **chemin inscrit dans X** toute application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$.

Remarque 7.1. ■ La relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

$$a \mathcal{R} b \iff \text{« il existe un chemin } \gamma \text{ inscrit dans } X \text{ tel que } \gamma(0) = a \text{ et } \gamma(1) = b \text{ »}$$

est une relation d'équivalence sur X . Les classes d'équivalences de cette relation sont appelées les **composantes connexes par arcs** de X .

Définition 7.4.

partie connexe par arcs

On dit que X est **connexe par arcs** si¹, pour tous a et b dans X , il existe un chemin γ inscrit dans X tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

1. c-à-d X ne possède qu'une seule composante connexe par arcs.

Exemple 7.3. ■ Toute partie convexe est connexe par arcs.

■ $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs : il admet deux composantes connexes par arcs, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Proposition 7.2.connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 7.1.

connexité par arcs d'une partie étoilée

Toute partie étoilée est connexe par arcs. (La réciproque est fausse)

Continuité et connexité par arcs**Théorème 7.2.**

image continue d'un connexe par arcs

L'image directe d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Corollaire 7.1.

TVI généralisé

Si X est connexe par arcs et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.