Devoir de contrôle N°3

Q1. Montrer que deux matrices carrées semblables ont le même spectre et que les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

Q2. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

Q3. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Que dire de la réciproque ?

Q4. Soient E un ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer que $\chi_u = X^{n-1}(X - \operatorname{Tr} u)$.

2. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Tr} u \neq 0$.

Q5. Soit E un ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ une projection vectorielle.

1. Montrer que $\chi_u = (X-1)^r X^{n-r}$ avec $r = \operatorname{rg} u$.

2. Montrer que u est diagonalisable.

3. Calculer $\prod_u$.

4. Calculer $\operatorname{Tr} u$.

....

....

Q6. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 2y_n - z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + y_n \end{cases} \quad (\Sigma)$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $(\Sigma) \iff X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer.

....

....

....

....

....

....

2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; X_n = A^n X_0$.

....

....

....

....

....

....

3. Calculer χ_A.

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Montrer que A est diagonalisable puis, déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ A^n = PD^nP^{-1}$.

....
....
....
....
....
....

6. Calculer P^{-1}.

....
....
....
....
....
....
....
....

7. Résoudre (Σ). (exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0)

....
....
....
....
....
....
....
....

Q7. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'équation matricielle $(\mathcal{E}) : X^2 + 2X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est diagonalisable puis, déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

....
....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de $(\mathcal{E})$. On pose $M = P^{-1}XP$.

   (a) Justifier que $M^2 + 2M = D$.

   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Montrer $DM = MD$.

   ....
   ....
   ....

   (c) En déduire que M est une matrice diagonale.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q8. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, $\prod_A = X^p$ si, et seulement si, A est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Q10. Montrer que, deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q11. Montrer que l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M) = M^{\intercal}$ est diagonalisable, puis déterminer $\mathrm{Sp}(\varphi)$.

....
....
....
....
....
....

Q12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = 1 \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{O_{n,1}\}$ telles que $A = UV^\intercal$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. En déduire un polynôme annulateur d'une matrice de rang 1.

....
....
....
....
....
....
....
....

3. Supposons $\operatorname{rg}(A) = 1$. Montrer que $\prod_A = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X$.

....
....
....
....
....
....

Q13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Calculer χ_A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les deux premières vecteurs sont des vecteurs propres de A telle que

$$T = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Q14. Soient E un ev et $x \in E$ non nul. Montrer que $\operatorname{Vect}(x)$ est stable par u si, et seulement si, x est vecteur propre de u.

....
....
....
....
....
....
....
....
....