Chapitre 5

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

Plan

Dérivation d'une fonction vectorielle d'une variable réelle

Dans ce chapitre est sauf indication contraire, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux et E, F et G des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application et $t_0 \in I$.

Définition 1.1 (dérivation).

1. On dit que f est ***dérivable*** en t_0 si le ***taux d'accroissement***

$$\begin{array}{rcccc} \tau_{t_0} & : & I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & F \\ & & t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \end{array}$$

admet une limite en t_0. Cette limite est alors appelée ***vecteur dérivé*** de f en t_0, on la note $f'(t_0)$.

$$\boxed{f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}.$$

2. On dit que f est ***dérivable*** si f est dérivable en tout point de I. On peut alors introduire ***l'application dérivée*** $f' : I \longrightarrow F$, $t \longmapsto f'(t)$.

Proposition 1.1 (caractérisation par le développement limité à l'ordre 1).

On a équivalence entre :

1. f *est dérivable en* t_0*;*
2. f *admet un développement limité*[1] *à l'ordre* 1 *en* t_0 *:*

$$\boxed{\exists v \in F, \quad f(t_0 + h) = f(t_0) + h.v + o(h)}.$$

Dans ce cas, $\boxed{f'(t_0) = v}$.

[1] $o(h) = h.\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0_F$.

Définition 1.2 (dérivabilité à gauche et à droite).

Soit t_0 un point intérieur à I.

1. On dit que f est ***dérivable à droite*** en t_0 si le ***taux d'accroissement*** τ_{t_0} admet une limite quand $t \to t_0^+$. Cette limite est alors appelée ***vecteur dérivé à droite*** de f en t_0, on la note $f'_d(t_0)$.

$$\boxed{f'_d(t_0) = \lim_{t \to t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}.$$

2. On dit que f est ***dérivable à gauche*** en t_0 si le ***taux d'accroissement*** τ_{t_0} admet une limite quand $t \to t_0^-$. Cette limite est alors appelée ***vecteur dérivé à gauche*** de f en t_0, on la note $f'_g(t_0)$.

$$\boxed{f'_g(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}.$$

Proposition 1.2.

Soit t_0 un point intérieur à I. On a équivalence entre :

1. *f est dérivable en t_0;*
2. *f est dérivable à droite et à gauche en t_0 avec* $\boxed{f'_g(t_0) = f'_d(t_0)}$.

Proposition 1.3 (caractérisation à l'aide d'une base).

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On écrit $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$ pour tout $t \in I$. On a équivalence entre :

1. *f est dérivable en t_0 (resp. sur I);*
2. *$\forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i$ est dérivable en t_0 (resp. sur I).*

Dans ce cas, $\boxed{f'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(t_0).e_i \quad (\textit{resp. } \forall t \in I,\ f'(t) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(t).e_i)}$.

$A : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable si, et seulement si, les fonctions coefficients $t \longmapsto a_{i,j}(t)$ le sont. On a alors

$$\begin{aligned} A'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a'_{i,j}(t).E_{i,j} \\ &= \begin{pmatrix} a'_{1,1}(t) & \dots & a'_{1,p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1}(t) & \dots & a'_{n,p}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application. On note $\mathcal{D}(I, F)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans F.

Proposition 1.4 (combinaison linéaire, produit).

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, F)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

1. $\lambda f + g \in \mathcal{D}(I, F)$ *et* $\boxed{(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'}$.
2. $\varphi.f \in \mathcal{D}(I, F)$ *et* $\boxed{(\varphi.f)' = \varphi'.f + \varphi.f'}$.

L'ensemble $\mathcal{D}(I, F)$ est un sev de $\mathcal{F}(I, F)$ et l'application

$$f \longmapsto f'$$

y est linéaire.

Proposition 1.5 (linéarité et composition).

Si $f \in \mathcal{D}(I,F)$ *et* $L \in \mathcal{L}(F,G)$, *alors* $L \circ f \in \mathcal{D}(I,G)$ *et*

$$\boxed{(L \circ f)' = L \circ f'}.$$

Si $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable alors $t \longmapsto \mathrm{Tr}\left(A(t)\right)$ est dérivable et pour tout $t \in I$,

$$\left(\mathrm{Tr}\left(A(t)\right)\right)' = \mathrm{Tr}\left(A'(t)\right)$$

Proposition 1.6 (bilinéarité et composition).

Soit $B : F \times G \longrightarrow E$ *une application bilinéaire.*
Si $f \in \mathcal{D}(I, F)$ *et* $g \in \mathcal{D}(I, G)$, *alors l'application* $B(f, g) : I \longrightarrow E$ *définie par* $B(f, g)(t) = B\big(f(t), g(t)\big)$ *est dérivable et*

$$\boxed{\big(B(f, g)\big)' = B(f', g) + B(f, g')}.$$

Soient $(E, <.,.>)$ un espace euclidien et $\|.\| = \sqrt{<.,.>}$ la norme euclidienne associée.
Si $f, g \in \mathcal{D}(I, E)$ alors

- l'application $\begin{array}{rccl} u : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & < f(t), g(t) > \end{array}$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,
$$u'(t) =< f'(t), g(t) > + < f(t), g'(t) >.$$
- l'application $\begin{array}{rccl} v : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \|f(t)\|^2 \end{array}$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,
$$v'(t) = 2 < f'(t), f(t) >.$$

Corollaire 1.1 (cas où F est une algèbre).

Soit F une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie.
Si $f, g \in \mathcal{D}(I, F)$ alors $fg \in \mathcal{D}(I, F)$ et

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'}.$$

Proposition 1.7 (composition).

Si $f \in \mathcal{D}(I, F)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ avec $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi \in \mathcal{D}(J, F)$ et

$$\boxed{\forall t \in J, \ \ \big(f \circ \varphi\big)'(t) = \varphi'(t).f'\big(\varphi(t)\big)}.$$

Proposition 1.8 (multilinéarité et dérivation).

Soit $m : F_1 \times \ldots \times F_k \longrightarrow F$ *une application multilinéaire.*
Si chaque $f_i : I \longrightarrow F_i,\ 1 \leq i \leq k$ *est dérivable, alors l'application* $m(f_1, \ldots, f_k) : t \longmapsto m\big(f_1(t), \ldots, f_k(t)\big)$ *est dérivable et*

$$\boxed{\big(m(f_1, \ldots, f_k)\big)' = \sum_{i=1}^{k} m(f_1, \ldots, f_i', \ldots, f_k)}.$$

Soit $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable.
Notons $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les colonnes de $A(t)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Les fonctions $C_1, \dots, C_n$ sont dérivables sur I et
$$\det\big(A(t)\big) = \det_{\mathcal{B}}\big(C_1(t), \dots, C_n(t)\big).$$
- Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est une application multilinéaire, alors $t \longmapsto \det\big(A(t)\big)$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,
$$\Big(\det\big(A(t)\big)\Big)' = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(C_1(t), \dots, C_i'(t), \dots, C_n(t)\big).$$

Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application et $k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.3 (dérivation d'ordre k, classe d'une fonction).

1. Lorsqu'elle existe, la ***dérivée*** k***-ème*** de f est l'application notée $f^{(k)}$ définie par récurrence par :

$$\boxed{f^{(k)} = f \text{ si } k = 0 \text{ et } f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' \text{ si } k \in \mathbb{N}^*}.$$

2. On dit que f est de ***classe*** $\mathcal{C}^k$ sur I si[1] f est k-fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
3. On dit que f est de ***classe*** $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

[1] On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est continue.

On note :

- $\mathcal{D}^k(I,F)$ l'ensemble des fonctions k-fois dérivables sur I pour $k \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{C}^k(I,F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.9 (caractérisation à l'aide d'une base).

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ *une base de* F. *On écrit* $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$ *pour tout* $t \in I$. *On a équivalence entre*[1] *:*

1. $f \in \mathcal{D}^k(I,F)$;
2. $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \ f_i \in \mathcal{D}^k(I,F)$.

Dans ce cas, $\boxed{\forall j \in [\![1,k]\!],\ \forall t \in I,\ \ f^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i^{(j)}(t).e_i}$.

[1] ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.10 (combinaison linéaire, produit).

Soient $f, g \in \mathcal{D}^k(I, F)$, $\varphi \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*[1]

1. $\lambda f + g \in \mathcal{D}^k(I, F)$ *et* $\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(\lambda f + g\right)^{(j)} = \lambda f^{(j)} + g^{(j)}}$.

   En particulier, $\mathcal{D}^k(I, F)$ *est un sev de* $\mathcal{F}(I, F)$.
2. $\varphi . f \in \mathcal{D}^k(I, F)$.

[1] ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.11 (linéarité et composition).

Si $f \in \mathcal{D}^k(I, F)$ *et* $L \in \mathcal{L}(F, G)$, *alors* $L \circ f \in \mathcal{D}^k(I, G)$ *et*[1]

$$\boxed{\forall j \in [\![1, k]\!],\ \left(L \circ f\right)^{(j)} = L \circ f^{(j)}}.$$

[1] ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Théorème 1.1 (formule de Leibniz).

Soit $B : F \times G \longrightarrow E$ *bilinéaire.*
Si $f \in \mathcal{D}^k(I, F)$ *et* $g \in \mathcal{D}^k(I, G)$, *alors* $B(f, g) \in \mathcal{D}^k(I, E)$ *et*[1]

$$\boxed{\forall t \in I,\ \ \big(B(f,g)\big)^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B\big(f^{(k-j)}(t), g^{(j)}(t)\big)}.$$

[1] ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Corollaire 1.2 (cas où F est une algèbre).

Soit F *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de dimension finie.*
Si $f, g \in \mathcal{C}^k(I, F)$ *alors* $fg \in \mathcal{C}^k(I, F)$ *et*

$$\boxed{(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)} g^{(j)}}.$$

Proposition 1.12 (composition).

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *Si* $f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$ *avec* $\varphi(J) \subset I$, *alors* $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(J, F)$.

Plan

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow F$ une application.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F.

Définition 2.1 (fonction continue par morceaux).

On dit que f est ***continue par morceaux*** (cpm) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \left(a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b\right)$ de $[a,b]$ telle que :

- $\forall i \in [[1,k]],\ \ f_{|]a_{i-1},a_i[}$ est continue;
- f à des limites finies à gauche en tout les $a_i,\ 1 \leq i \leq k$ et à droite en tout les $a_i,\ 0 \leq i \leq k-1$.

Proposition 2.1 (caractérisation à l'aide d'une base).

On écrit, pour $t \in [a,b]$, $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$. *La fonction* f *est cpm si, et seulement si, chaque* f_i *est cpm.*

1. La notion ci-dessus ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de F.
2. L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}\big([a,b], F\big)$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sev de $\mathcal{F}\big([a,b], F\big)$.

Définition 2.2 (intégration entre deux bornes).

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}\big([a,b], F\big)$. On écrit $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$ pour tout $t \in [a,b]$.

On appelle ***intégrale de f de a à b*** le vecteur

$$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t\right) e_i}.$$

La valeur de l'intégrale ci-dessus ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de F.

Proposition 2.2 (propriétés de l'intégrale).

Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}\big([a,b], F\big)$, $L \in \mathcal{L}(F,G)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $c \in [a,b]$.

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$. *(Linéarité)*
2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. *(Relation de Chasles)*
3. $\displaystyle\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$. *(Inégalité triangulaire)*
4. $\displaystyle L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$.

Théorème 2.1 (sommes de Riemann).

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}\big([a,b], F\big)$, *alors*

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t}.$$

On a aussi $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

- $S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t\sin(\pi t)$.
- f est continue sur $[0,1]$ et S_n est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$ donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} S_n &= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\sin(\pi t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

Intégrale fonction de sa borne supérieure et applications

Soit $f : I \longrightarrow F$ une fonction et $a \in I$.

Définition 2.3 (primitive).

On appelle ***primitive*** de f, s'il en existe, toute fonction $G : I \longrightarrow F$ dérivable vérifiant $G' = f$.

Théorème 2.2 (théorème fondamental du calcul intégral).

Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive.
Plus précisément : Si f est continue, alors

- *La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*
- *De plus, pour toute primitive G de f sur I, on a*

$$\forall x \in I,\;\; G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Corollaire 2.1.

Si f est continue de primitive G, alors

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2, \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a)}.$$

Théorème 2.3 (inégalité des accroissements finis).

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$. S'il existe $M \geq 0$ vérifiant $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| \leq M$, alors[1]

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2, \ \|f(b) - f(a)\| \leq M|b-a|}.$$

[1] En d'autres termes, la fonction f est lipschitzienne.

Le théorème des accroissements finis n'est plus vérifié si $F \neq \mathbb{R}$.
En effet : la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left(\cos t, \sin t\right) \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \neq (0,0)$ tandis que $f(2\pi) = f(0)$.

Formules de Taylor

Soit $f : I \longrightarrow F$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.4 (formule de Taylor avec reste intégrale).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$. *Pour tout*[1] $(a, x) \in I^2$,

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}.$$

[1] Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 2.5 (inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,F)$*. Si* $f^{(n+1)}$ *est bornée, alors*[1] *pour tout* $(a,x) \in I^2$*,*

$$\boxed{\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in I} \| f^{(n+1)}(t) \|}.$$

[1] Dans le cas $n = 0$, on retrouve inégalité des accroissements finis.

Théorème 2.6 (formule de Taylor-Young).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, F)$*. Pour tout* $a \in I$*,*

$$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F.}$$

Cette formule[1] *est appelée* ***développement limité*** *de* f *à l'ordre* n *en* a*.*

[1] La formule de Taylor-Young est locale.

Merci pour votre attention !