Fonctions vectorielles d'une variable réelle

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce chapitre est sauf indication contraire, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux et E, F et G des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1 Dérivation

Dérivation d'une fonction vectorielle d'une variable réelle

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application et $t_0 \in I$.

Définition 1.1. **dérivation**

1. On dit que f est ***dérivable*** en t_0 si le ***taux d'accroissement*** $\tau_{t_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{t_0\} & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \end{array}$ admet une limite en t_0. Cette limite est alors appelée ***vecteur dérivé*** de f en t_0, on la note $f'(t_0)$.

$$\boxed{f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}.$$

2. On dit que f est ***dérivable*** si f est dérivable en tout point de I. On peut alors introduire ***l'application dérivée*** $f' : I \longrightarrow F$, $t \longmapsto f'(t)$.

Proposition 1.1. **caractérisation par le développement limité à l'ordre 1**

On a équivalence entre :

(i) f est dérivable en t_0 ;

(ii) f admet un développement limité [1] à l'ordre 1 en t_0 : $\boxed{\exists v \in F, \quad f(t_0 + h) = f(t_0) + h.v + o(h)}$.

Dans ce cas, $\boxed{f'(t_0) = v}$.

1. $o(h) = h.\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0_F$.

Définition 1.2. **dérivabilité à gauche et à droite**

Soit t_0 un point intérieur à I.

1. On dit que f est ***dérivable à droite*** en t_0 si le ***taux d'accroissement*** τ_{t_0} admet une limite quand $t \to t_0^+$. Cette limite est alors appelée ***vecteur dérivé à droite*** de f en t_0, on la note $f'_d(t_0)$.

$$\boxed{f'_d(t_0) = \lim_{t\to t_0^+} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}.$$

2. On dit que f est ***dérivable à gauche*** en t_0 si le ***taux d'accroissement*** τ_{t_0} admet une limite quand $t \to t_0^-$. Cette limite est alors appelée ***vecteur dérivé à gauche*** de f en t_0, on la note $f'_g(t_0)$.

$$\boxed{f'_g(t_0) = \lim_{t\to t_0^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}}.$$

Proposition 1.2.

Soit t_0 un point intérieur à I. On a équivalence entre :

(i) f est dérivable en t_0 ;

(ii) f est dérivable à droite et à gauche en t_0 avec $\boxed{f'_g(t_0) = f'_d(t_0)}$.

Proposition 1.3. **caractérisation à l'aide d'une base**

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On écrit $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$ pour tout $t \in I$. On a équivalence entre :

(i) f est dérivable en t_0 (resp. sur I) ;

(ii) $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est dérivable en t_0 (resp. sur I).

Dans ce cas, $\boxed{f'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(t_0).e_i \quad (\text{resp. } \forall t \in I,\ f'(t) = \sum_{i=1}^{p} f'_i(t).e_i)}$.

Exemple 1.1. $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable si, et seulement si, les fonctions coefficients $t \longmapsto a_{i,j}(t)$ le sont. On a alors

$$A'(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a'_{i,j}(t).E_{i,j} = \begin{pmatrix} a'_{1,1}(t) & \dots & a'_{1,p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1}(t) & \dots & a'_{n,p}(t) \end{pmatrix}.$$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit $f : I \longrightarrow F$ une application. On note $\mathcal{D}(I, F)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans F.

Proposition 1.4. **combinaison linéaire, produit**

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, F)$, $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

1. $\lambda f + g \in \mathcal{D}(I, F)$ et $\boxed{(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'}$.

2. $\varphi.f \in \mathcal{D}(I, F)$ et $\boxed{(\varphi.f)' = \varphi'.f + \varphi.f'}$.

Remarque 1.1. L'ensemble $\mathcal{D}(I, F)$ est un sev de $\mathcal{F}(I, F)$ et l'application $f \longmapsto f'$ y est linéaire.

Proposition 1.5. **linéarité et composition**

Si $f \in \mathcal{D}(I, F)$ et $L \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $L \circ f \in \mathcal{D}(I, G)$ et $\boxed{(L \circ f)' = L \circ f'}$.

Exemple 1.2. Si $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable alors $t \longmapsto \operatorname{Tr}(A(t))$ est dérivable et $\left(\operatorname{Tr}(A(t))\right)' = \operatorname{Tr}(A'(t))$ pour tout $t \in I$.

Proposition 1.6. **bilinéarité et composition**

Soit $B : F\times G \longrightarrow E$ une application bilinéaire. Si $f \in \mathcal{D}(I,F)$ et $g\in\mathcal{D}(I,G)$, alors l'application $B(f,g) : I \longrightarrow E$ définie par $B(f,g)(t) = B\big(f(t),g(t)\big)$ est dérivable et $\boxed{\big(B(f,g)\big)' = B(f',g)+B(f,g')}$.

Exemple 1.3. Soient $\big(E,<.,.>\big)$ un espace euclidien et $\|.\| = \sqrt{<.,.>}$ la norme euclidienne associée.
Si $f,g\in\mathcal{D}(I,E)$ alors

- l'application $\begin{array}{rccl} u & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & <f(t),g(t)> \end{array}$ est dérivable sur I et $\forall t\in I,\ \ u'(t) = <f'(t),g(t)> + <f(t),g'(t)>$.
- l'application $\begin{array}{rccl} v & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \|f(t)\|^2 \end{array}$ est dérivable sur I et $\forall t\in I,\ \ v'(t) = 2<f'(t),f(t)>$.

Corollaire 1.1. **cas où F est une algèbre**

Soit F une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie. Si $f,g\in\mathcal{D}(I,F)$ alors $fg\in\mathcal{D}(I,F)$ et $\boxed{(fg)' = f'g+fg'}$.

Proposition 1.7. **composition**

Si $f\in\mathcal{D}(I,F)$ et $\varphi\in\mathcal{D}(J,\mathbb{R})$ avec $\varphi(J)\subset I$, alors $f\circ\varphi\in\mathcal{D}(J,F)$ et $\boxed{\forall t\in J,\ \ \big(f\circ\varphi\big)'(t) = \varphi'(t).f'\big(\varphi(t)\big)}$.

Proposition 1.8. **multilinéarité et dérivation**

Soit $m : F_1\times\ldots\times F_k \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Si chaque $f_i : I\longrightarrow F_i$, $1\le i\le k$ est dérivable, alors l'application $m(f_1,\ldots,f_k) : t\longmapsto m\big(f_1(t),\ldots,f_k(t)\big)$ est dérivable et

$$\boxed{\big(m(f_1,\ldots,f_k)\big)' = \sum_{i=1}^{k} m(f_1,\ldots,f_i',\ldots,f_k)}.$$

Exemple 1.4. Soit $A : I\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dérivable. Notons $C_1(t),\ldots,C_n(t)$ les colonnes de $A(t)$ et $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Les fonctions $C_1,\ldots,C_n$ sont dérivables sur I et $\det\big(A(t)\big) = \det_{\mathcal{B}}\big(C_1(t),\ldots,C_n(t)\big)$.
- Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est une application multilinéaire, alors $t\longmapsto\det\big(A(t)\big)$ est dérivable sur I et

$$\forall t\in I,\ \ \big(\det\big(A(t)\big)\big)' = \sum_{i=1}^{n}\det_{\mathcal{B}}\big(C_1(t),\ldots,C_i'(t),\ldots,C_n(t)\big).$$

Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f : I\longrightarrow F$ une application et $k\in\mathbb{N}$.

Définition 1.3. **dérivation d'ordre k, classe d'une fonction**

1. Lorsqu'elle existe, la ***dérivée** k**-ème*** de f est l'application notée $f^{(k)}$ définie par récurrence par :

$$\boxed{f^{(k)} = f \text{ si } k=0 \text{ et } f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)' \text{ si } k\in\mathbb{N}^*}.$$

2. On dit que f est de ***classe*** $\mathcal{C}^k$ sur I si[1] f est k-fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
3. On dit que f est de ***classe*** $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k\in\mathbb{N}$.

1. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est continue.

On note :

- $\mathcal{D}^k(I,F)$ l'ensemble des fonctions k-fois dérivables sur I pour $k\in\mathbb{N}$.

- $\mathcal{C}^k(I,F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.9. **caractérisation à l'aide d'une base**

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. On écrit $f(t)=\sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$ pour tout $t \in I$. On a équivalence entre [1] :

(i) $f \in \mathcal{D}^k(I,F)$; **(ii)** $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \ f_i \in \mathcal{D}^k(I,F)$.

Dans ce cas, $\boxed{\forall j \in [\![1,k]\!],\ \forall t \in I,\ \ f^{(j)}(t)=\sum_{i=1}^{p} f_i^{(j)}(t).e_i}$.

1. ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.10. **combinaison linéaire, produit**

Soient $f,g \in \mathcal{D}^k(I,F)$, $\varphi \in \mathcal{D}^k(I,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors [1]

1. $\lambda f+g \in \mathcal{D}^k(I,F)$ et $\boxed{\forall j \in [\![1,k]\!],\ \big(\lambda f+g\big)^{(j)}=\lambda f^{(j)}+g^{(j)}}$. En particulier, $\mathcal{D}^k(I,F)$ est un sev de $\mathcal{F}(I,F)$.

2. $\varphi.f \in \mathcal{D}^k(I,F)$.

1. ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.11. **linéarité et composition**

Si $f \in \mathcal{D}^k(I,F)$ et $L \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $L\circ f \in \mathcal{D}^k(I,G)$ et [1] $\boxed{\forall j \in [\![1,k]\!],\ \ \big(L\circ f\big)^{(j)}=L\circ f^{(j)}}$.

1. ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Théorème 1.1. **formule de Leibniz**

Soit $B : F\times G \longrightarrow E$ bilinéaire. Si $f \in \mathcal{D}^k(I,F)$ et $g \in \mathcal{D}^k(I,G)$, alors $B(f,g) \in \mathcal{D}^k(I,E)$ et [1]

$$\boxed{\forall t \in I,\ \ \big(B(f,g)\big)^{(k)}(t)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}B\big(f^{(k-j)}(t),g^{(j)}(t)\big)}.$$

1. ***On peut remplacer*** $\mathcal{D}^k$ par $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Corollaire 1.2. **cas où F est une algèbre**

Soit F une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie. Si $f,g \in \mathcal{C}^k(I,F)$ alors $fg \in \mathcal{C}^k(I,F)$ et $\boxed{(fg)^{(k)}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}f^{(k-j)}g^{(j)}}$.

Proposition 1.12. **composition**

Soit $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Si $f \in \mathcal{C}^k(I,F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$ avec $\varphi(J) \subset I$, alors $f\circ\varphi \in \mathcal{C}^k(J,F)$.

2 Intégration sur un segment

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow F$ une application.

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de F.

Définition 2.1. **fonction continue par morceaux**

On dit que f est ***continue par morceaux*** (cpm) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \big(a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b\big)$ de $[a,b]$ telle que :

- $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \ f_{|]a_{i-1},a_i[}$ est continue ;
- f à des limites finies à gauche en tout les a_i, $1 \leq i \leq k$ et à droite en tout les a_i, $0 \leq i \leq k-1$.

Proposition 2.1. **caractérisation à l'aide d'une base**

On écrit, pour $t \in [a,b]$, $\ f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$. La fonction f est cpm si, et seulement si, chaque f_i est cpm.

Remarque 2.1. ■ La notion ci-dessus ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de F.

■ L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}\big([a,b],F\big)$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est un sev de $\mathcal{F}\big([a,b],F\big)$.

Définition 2.2. **intégration entre deux bornes**

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}\big([a,b],F\big)$. On écrit $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t).e_i$ pour tout $t \in [a,b]$.

On appelle ***intégrale de*** f ***de*** a ***à*** b le vecteur $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t\right)e_i}$.

Remarque 2.2. ■ La valeur de l'intégrale ci-dessus ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de F.

Proposition 2.2. **propriétés de l'intégrale**

Soient $f,g \in \mathcal{C}_{pm}\big([a,b],F\big)$, $L \in \mathcal{L}(F,G)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $c \in [a,b]$.

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$. (Linéarité)
2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. (Relation de Chasles)
3. $\displaystyle\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$. (Inégalité triangulaire)
4. $\displaystyle L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L\circ f$.

Théorème 2.1. **sommes de Riemann**

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}\big([a,b],F\big)$, alors $\boxed{\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$.

Remarque 2.3. ■ On a aussi $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 2.1. ■ Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

- $\displaystyle S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t\sin(\pi t)$.
- f est continue sur $[0,1]$ et S_n est une somme de Riemann de f sur $[0,1]$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t\sin(\pi t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}.$$

Intégrale fonction de sa borne supérieure et applications

Soit $f : I \longrightarrow F$ une fonction et $a \in I$.

Définition 2.3. **primitive**

On appelle ***primitive*** de f, s'il en existe, toute fonction $G : I \longrightarrow F$ dérivable vérifiant $G' = f$.

Théorème 2.2. **théorème fondamental du calcul intégral**

Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive. Plus précisément : Si f est continue, alors

- La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
- De plus, pour toute primitive G de f sur I, on a $\forall x \in I,\ G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Corollaire 2.1.

Si f est continue de primitive G, alors $\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [G(t)]_a^b = G(b) - G(a)}$.

Théorème 2.3. **inégalité des accroissements finis**

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,F)$. S'il existe $M \geq 0$ vérifiant $\forall t \in I,\ \|f'(t)\| \leq M$, alors [1] $\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ \|f(b) - f(a)\| \leq M|b-a|}$.

1. En d'autres termes, la fonction f est lipschitzienne.

Remarque 2.4. ■ Le théorème des accroissements finis n'est plus vérifié si $F \neq \mathbb{R}$: la fonction $f(t) = \big(\cos t, \sin t\big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R},\ f'(t) \neq (0,0)$ tandis que $f(2\pi) = f(0)$.

Formules de Taylor

Soit $f : I \longrightarrow F$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.4. **formule de Taylor avec reste intégrale**

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,F)$. Pour tout [1] $(a,x) \in I^2$, $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t}$.

1. Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

Théorème 2.5. **inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,F)$. Si $f^{(n+1)}$ est bornée, alors [1] pour tout $(a,x) \in I^2$,

$$\boxed{\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} \|f^{(n+1)}(t)\|}.$$

1. Dans le cas $n = 0$, on retrouve inégalité des accroissements finis.

Théorème 2.6. **formule de Taylor-Young**

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,F)$. Pour tout $a \in I$, $\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \ \text{ avec } \ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0_F.}$

Cette formule [1] est appelée ***développement limité*** de f à l'ordre n en a.

1. La formule de Taylor-Young est locale.