Séries dans un evn de dimension finie, familles sommables

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie.

1 Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Généralités

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E.

Définition 1.1. **série, somme, reste**

1. On appelle ***série de terme général*** u_n la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.
2. Pour n fixé, S_n s'appelle ***somme partielle*** de la série $\sum u_n$.
3. On dit que la série $\sum u_n$ ***converge***[1] lorsque la suite $(S_n)_n$ converge. Dans ce cas :
   - **a.** Sa limite est alors appelée ***somme*** de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   - **b.** La différence $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé ***reste d'ordre*** n de la série.

1. Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle ***diverge***.

Remarque 1.1. ■ Si $\sum u_n$ converge alors $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 1.1. **condition nécessaire de convergence**

Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (La réciproque est fausse).

Remarque 1.2. ■ Si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ ***diverge grossièrement***.

Proposition 1.2. **lien suite-série**

La suite $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, la ***série télescopique*** $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. Dans ce cas [1],

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_0}.$$

1. La série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et la suite $(u_n)_n$ sont de même nature.

Proposition 1.3. **linéarité de la somme**

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, la série $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge. De plus

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_n}.$$

Théorème 1.1. **caractérisation à l'aide d'une base**

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_p)$ une base de E. On écrit chaque u_n dans la base $\mathcal{B}$: $u_n=\sum_{i=1}^{p}u_n^{(i)}e_i$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, pour tout $1\leq i\leq p$, la série numérique $\sum_{n\geq0}u_n^{(i)}$ converge. De plus :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{(i)}\right)e_i}.$$

Exemple 1.1. ■ Soient $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $A_n=\left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{1\leq i,j\leq p}$ et $\left(E_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. La série $\sum A_n$ converge si, et seulement si, pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, la série numérique $\sum_{n\geq0}a_{i,j}^{(n)}$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n=\sum_{i,j=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{i,j}^{(n)}\right)E_{i,j}$.

Définition 1.2. **convergence absolue**

La série $\sum u_n$ est dite ***absolument convergente*** lorsque la série à termes positifs $\sum\|u_n\|$ converge.

Théorème 1.2. **convergence vs convergence absolue**

Si $\sum u_n$ converge absolument alors [1] $\sum u_n$ converge (La réciproque est fausse). De plus $\boxed{\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right\|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|}$.

1. on rappelle ici que $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de l'espace E qui est de ***dimension finie***.

Séries dans une algèbre normée de dimension finie

Soit $(\mathcal{A},+,\times,.)$ une algèbre normée de dimension finie d'élément unité e. La norme ici est une norme d'algèbre :

$$\forall(u,v)\in\mathcal{A}^2,\ \|u\times v\|\leq\|u\|\|v\|.$$

Théorème 1.3. **série géométrique de Neumann**

Soit $a\in\mathcal{A}$ tel que $\|a\|<1$. La ***série géométrique*** $\sum_{n\geq0}a^n$ converge absolument et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=(e-a)^{-1}}$. $(a^0=e)$

Théorème 1.4. **série exponentielle**

Soit $a \in \mathcal{A}$. La ***série exponentielle*** $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ converge absolument et $\boxed{\exp(a) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}}$.

2 Ensembles dénombrables

Définition 2.1. **ensemble dénombrable, au plus dénombrable.**

Un ensemble est dit ***dénombrable*** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, il est dit ***au plus dénombrable*** s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Exemple 2.1.
- $\mathbb{N}^*$ est dénombrable via $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ donnée par $\varphi(n) = n+1$.
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable via $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(n) = n/2$ si n est pair et $\varphi(n) = -(n+1)/2$ si n est impair.
- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable via $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ donnée par $\varphi(n,m) = 2^n(2m+1)$.

Théorème 2.1. **parties infinies de $\mathbb{N}$**

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Corollaire 2.1.

Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.

Théorème 2.2. **opérations sur les ensembles dénombrables**

1. Un produit cartésien ***fini*** d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
2. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

Exemple 2.2.
- Pour $p \geq 1$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
- $\mathbb{Q} = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q}\right\}$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

Théorème 2.3.

Soit I un ensemble au plus dénombrable. Si $(F_i)_{i\in J}$ est une partition[1] de I, alors J est au plus dénombrable.

1. $I = \bigcup_{i\in J} F_i$ avec $F_i \cap F_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $F_i \neq \varnothing$ pour tout $i \in J$.

Théorème 2.4.

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

3 Familles sommables

Familles sommables de nombres réels positifs

Rappelle des propriétés basiques dans $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$:

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a < +\infty$, $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}^+}$ admet une borne supérieure : $\max \overline{\mathbb{R}^+} = +\infty$.

Définition 3.1. **somme d'une famille de $\overline{\mathbb{R}^+}$**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}^+}$. On appelle ***somme*** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'élément $\sup\limits_{\substack{F\subset I\\ F \text{ finie}}} \sum\limits_{i\in F} u_i$. Cet élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ est noté $\sum\limits_{i\in I} u_i$: $\boxed{\sum\limits_{i\in I} u_i \overset{\text{déf}}{=} \sup\limits_{\substack{F\subset I\\ F \text{ finie}}} \sum\limits_{i\in F} u_i = \sup\left\{\sum\limits_{i\in F} u_i \ \text{ tel que } F \text{ finie } \subset I\right\} \in \overline{\mathbb{R}^+}}$.

Proposition 3.1. **invariance de la somme par permutation**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}^+}$ et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection. On a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'égalité : $\boxed{\sum\limits_{j\in I} u_{\sigma(j)} = \sum\limits_{i\in I} u_i}$.

Définition 3.2. **famille sommable de réels positifs**

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^+$ est ***sommable*** si [1] $\sum\limits_{i\in I} u_i < +\infty$, cela revient à dire qu'il existe $M>0$ tel que, pour toute partie finie F de I, $0 \le \sum\limits_{i\in F} u_i \le M$.

1. Dans le cas où la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum\limits_{i\in I} u_i := +\infty$.

Exemple 3.1. ■ Les familles finies sont assurément sommables.

■ Soit $q\in[0,1[$ et $u_n = q^{|n|}$ pour $n\in\mathbb{Z}$. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \dfrac{1+q}{1-q}$.

- Pour toute partie F finie de $\mathbb{Z}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $F\subset [\![-N,N]\!]$, donc

$$\sum_{i\in F} u_i \le \sum_{n=-N}^{N} q^{|n|} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} q^n = 1 + 2q\frac{1-q^N}{1-q} \le \frac{1+q}{1-q}.$$

- La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc sommable. De plus $\sum\limits_{n=-N}^{N} q^{|n|} \xrightarrow[N\to\infty]{} \dfrac{1+q}{1-q}$. D'où $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \dfrac{1+q}{1-q}$.

Remarque 3.1 (Support d'une famille de $\mathbb{R}^+$).

■ Le ***support*** d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ est par définition l'ensemble $S = \left\{i\in I,\ \ u_i \neq 0\right\}$.

■ Le support d'une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^+$ est au plus dénombrable. En effet :

- $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left\{i\in I,\ \ u_i > \frac{1}{k}\right\}}_{=I_k} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} I_k$. Soit $M = \sum\limits_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}^+$. On a : $M \ge \sum\limits_{i\in I_k} u_i \ge \sum\limits_{i\in I_k} \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k}\operatorname{Card} I_k$, donc l'ensemble I_k est fini.
- S s'exprime alors comme une réunion dénombrable d'ensembles finis, c'est donc un ensemble au plus dénombrable.

On se restreindra par la suite au cas où le domaine d'indexation I est ***au plus dénombrable***.

Proposition 3.2. **sommabilité des familles de réels positifs indexées par $\mathbb{N}$**

La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^+$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $\boxed{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

Proposition 3.3. **critère de comparaison**

Si $0\le u_i \le v_i$ pour tout $i\in I$ et $(v_i)_{i\in I}$ est sommable alors [1] $(u_i)_{i\in I}$ sommable et on a : $\boxed{0 \le \sum\limits_{i\in I} u_i \le \sum\limits_{i\in I} v_i}$.

1. La non sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$ entraine la non sommabilité de $(v_i)_{i\in I}$.

Proposition 3.4. **opérations**

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de $\mathbb{R}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Les familles $\left(\lambda u_i\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i+v_i\right)_{i\in I}$ sont sommables et on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I}\left(\lambda u_i\right) = \lambda\sum_{i\in I}u_i \text{ et } \sum_{i\in I}\left(u_i+v_i\right) = \sum_{i\in I}u_i + \sum_{i\in I}v_i}.$$

Théorème 3.1. **sommation par paquets positif**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbb{R}^+$ et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. On a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'égalité : $\boxed{\sum_{i\in I}u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j}u_i\right)}$.

En particulier, il est équivalent de dire :

(i) $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ;

(ii) $\forall j\in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{i\in I_j}u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.

Exemple 3.2. ■ On pose, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $u_{i,j} = \dfrac{1}{(i+j+1)2^{i+j}}$.

Considérons la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ définie par $I_n = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \ i+j=n\right\}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, I_n est fini donc la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I_n}$ est sommable. De plus, $\operatorname{Card} I_n = n+1$ et on a :

$$\sum_{(i,j)\in I_n}u_{i,j} = \sum_{(i,j)\in I_n}\frac{1}{(i+j+1)2^{i+j}} = \sum_{(i,j)\in I_n}\frac{1}{(n+1)2^n} = \frac{1}{(n+1)2^n}\sum_{(i,j)\in I_n}1 = \frac{\operatorname{Card} I_n}{(n+1)2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

- La série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{2^n}$ converge car géométrique.

D'où la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in I_n}u_{i,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n} = 2.$

Théorème 3.2. **théorème de Fubini positif**

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de $\mathbb{R}^+$. On a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'égalité : $\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J}u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}u_{i,j}\right)}$.

En particulier, il est équivalent de dire :

(i) $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable ;

(ii) $\forall i\in I$, $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{j\in J}u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.

Théorème 3.3. **théorème de Fubini positif (cas des suites doubles)**

Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de $\mathbb{R}^+$. On a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'égalité : $\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{m,n}\right)}$.

En particulier, il est équivalent de dire :

(i) $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable ;

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{m\geq 0}u_{m,n}$ converge et la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{m,n}\right)$ converge.

Exemple 3.3. ■ Considérons $u_{m,n} = \dfrac{n^m}{m!n!}$, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.

- $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{m\geq 0}u_{m,n}$ converge par la règle de d'Alembert : $\dfrac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}} = \dfrac{n}{m+1}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$. De plus

$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^m}{m!n!} = \frac{\mathrm{e}^n}{n!}.$$

- La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ converge par la règle de d'Alembert : $\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\mathrm{e}^n} = \frac{\mathrm{e}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

D'où la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n!} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}.$$

Familles sommables de nombres réels ou de complexes

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble au plus dénombrable (finie ou dénombrable).

- Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Pour tout $i\in I$, on introduit $\boxed{u_i^+ = \max(u_i, 0)}$ et $\boxed{u_i^- = \max(-u_i, 0)}$.
- Les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ étant à termes ***positifs*** et pour tout $i\in I$, $\boxed{u_i = u_i^+ - u_i^-}$ et $\boxed{|u_i| = u_i^+ + u_i^-}$.

Définition 3.3. **famille sommable de réels ou de complexes**

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou de complexes est ***sommable*** si la famille $\left(|u_i|\right)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^+$ est sommable.

Dans ce cas, on pose : $\boxed{\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- & \text{si} \quad (u_i)_{i\in I} \text{ est réelles.} \\ \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i}\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i) & \text{si} \quad (u_i)_{i\in I} \text{ est complexes.}\end{cases}}$.

Le scalaire $\sum_{i\in I} u_i$ est appelé la ***somme*** de la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Proposition 3.5.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels ou de complexes sommable et $\varepsilon > 0$, alors il existe une partie finie F de I telle que $\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| < \varepsilon$.

Proposition 3.6. **sommabilité des familles de réels ou de complexes indexées par $\mathbb{N}$**

La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels ou de complexes est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge absolument.

Dans ce cas, $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.

Proposition 3.7. **invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation**

Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $\left(u_{\sigma(j)}\right)_{j\in I}$ est sommable. Dans ce cas, $\boxed{\sum_{j\in I} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} u_i}$.

Proposition 3.8. **critère de comparaison**

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une familles de réels ou de complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une familles de $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{cases} \forall i\in I,\ |u_i| \leq v_i \\ (v_i)_{i\in I} \text{ est sommable}\end{cases} \Longrightarrow (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable.}$$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles de réels ou de complexes sommables.

Proposition 3.9. **propriétés**

1. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\left(u_i + \lambda v_i\right)_{i\in I} \in \ell^1(I)$ et on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I}\left(u_i + \lambda v_i\right) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda \sum_{i\in I} v_i}.$$

En particulier, $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

2. Si $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$, alors $\boxed{\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \le \sum_{i\in I} |u_i|}$. (Inégalité triangulaire)

3. Si $J \subset I$ et $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$, alors $(u_i)_{i\in J} \in \ell^1(J)$. (Une sous-famille d'une famille sommable est sommable)

Théorème 3.4. **sommation par paquets**

Si $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes sommable, alors

$$\boxed{\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)}.$$

En particulier, la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable et elle a la même somme que $(u_i)_{i\in I}$.

Remarque 3.2 (Critère suffisant de sommabilité.).

■ On vérifie l'hypothèse de sommabilité d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou de complexes en appliquant le théorème de sommation par paquets positifs, à la famille $\left(|u_i|\right)_{i\in I}$.

Théorème 3.5. **théorème de Fubini**

Si la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de réels ou de complexes est sommable, alors

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)}.$$

Théorème 3.6. **théorème de Fubini (cas des suites doubles)**

Si la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels ou de complexes est sommable, alors

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)}.$$

Exemple 3.4. ■ Considérons $u_{m,n} = \dfrac{z^n n^m}{m!n!}$, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ et $z\in\mathbb{C}^*$.

- $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{m\ge 0} |u_{m,n}|$ converge par le critère de d'Alembert : $\left|\dfrac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}}\right| = \dfrac{n}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. De plus

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}| = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^m}{m!n!}|z|^n = \frac{|z|^n \,\mathrm{e}^n}{n!}.$$

- La série $\sum_{n\ge 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right)$ converge par le critère de d'Alembert : $\dfrac{|z|^{n+1}\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{|z|^n\,\mathrm{e}^n} = \dfrac{|z|\,\mathrm{e}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

D'où la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^n n^m}{m!n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n\,\mathrm{e}^n}{n!} = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{e}}.$$

Corollaire 3.1. **cas d'une famille d'indices séparés**

Si les familles de réels ou de complexes $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ sont sommables, alors la famille $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right)}.$$

Corollaire 3.2. **extension au produit d'un nombre fini de familles sommables**

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Si les familles de réels ou de complexes $\left(u_{i_1}^{(1)}\right)_{i_1\in I_1},\dots,\left(u_{i_k}^{(k)}\right)_{i_k\in I_k}$ sont sommables, alors la famille $\left(u_{i_1}^{(1)}\dots u_{i_k}^{(k)}\right)_{(i_1,\dots,i_k)\in I_1\times\dots\times I_k}$ est sommable et

$$\boxed{\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I_1\times\dots\times I_k} u_{i_1}^{(1)}\dots u_{i_k}^{(k)} = \left(\sum_{i_1\in I_1} u_{i_1}^{(1)}\right)\dots\left(\sum_{i_k\in I_k} u_{i_k}^{(k)}\right)}.$$

Application au produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 3.4. **produit de Cauchy de deux séries**

On appelle ***produit de Cauchy*** des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ définie par :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n = \sum_{i+j=n} u_iv_j = \sum_{i=0}^{n} u_iv_{n-i}}.$$

Théorème 3.7. **convergence de la série produit de Cauchy**

Si les séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont ***absolument convergentes***, alors leur produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ ***converge absolument*** et la famille $(u_pv_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Dans ce cas

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_pv_q = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n}.$$

Corollaire 3.3.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie [1] et $(u,v)\in\mathcal{A}^2$. Si $uv=vu$, alors $\boxed{\exp(u+v)=\exp(u)\exp(v)}$.

1. Parmi les cas fréquents : $\mathcal{A}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{A}=\mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.