Chapitre 4

# Séries dans un evn de dimension finie, familles sommables

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

*Filière MP*

2025-2026

# Plan

# Plan

# Généralités

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit $\left(u_n\right)_n$ une suite d'éléments de $E$.

**Définition 1.1 (série, somme, reste).**

1. On appelle ***série de terme général*** $u_n$ la suite $\left(S_n\right)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.
2. Pour $n$ fixé, $S_n$ s'appelle ***somme partielle*** de la série $\sum u_n$.

## Définition 1.2 (série, somme, reste).

3 On dit que la série $\sum u_n$ ***converge***[1] lorsque la suite $\left(S_n\right)_n$ converge. Dans ce cas :

- Sa limite est alors appelée ***somme*** de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- La différence $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé ***reste d'ordre*** $n$ de la série.

[1] Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle ***diverge***.

Si $\sum u_n$ converge alors $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**Proposition 1.1 (condition nécessaire de convergence).**

*Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (La réciproque est fausse).*

Si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers $0$, on dit que la série $\sum u_n$ ***diverge grossièrement***.

## Proposition 1.2 (lien suite-série).

*La suite* $\left(u_n\right)_n$ *converge si, et seulement si, la* ***série télescopique*** $\sum\left(u_{n+1}-u_n\right)$ *converge. Dans ce cas*[1]*,*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(u_{n+1}-u_n\right)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_0}.$$

[1] La série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et la suite $(u_n)_n$ sont de même nature.

## Proposition 1.3 (linéarité de la somme).

*Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors pour tout* $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$*, la série* $\sum\left(\lambda u_n+\mu v_n\right)$ *converge. De plus*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lambda u_n+\mu v_n\right)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_n}.$$

## Théorème 1.1 (caractérisation à l'aide d'une base).

*Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* $E$*. On écrit chaque* $u_n$ *dans la base* $\mathcal{B}$ : $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

*La série* $\sum u_n$ *converge si, et seulement si, pour tout* $1 \leq i \leq p$, *la série numérique* $\sum_{n\geq 0} u_n^{(i)}$ *converge. De plus :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)} \right) e_i}.$$

Soient $\left(A_n\right)_n$ une suite de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $A_n = \left(a_{i,j}^{(n)}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$ et $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

La série $\sum A_n$ converge si, et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série numérique $\sum\limits_{n \geq 0} a_{i,j}^{(n)}$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n = \sum_{i,j=1}^{p} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,j}^{(n)} \right) E_{i,j}.$$

## Définition 1.3 (convergence absolue).

La série $\sum u_n$ est dite ***absolument convergente*** lorsque la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$ converge.

## Théorème 1.2 (convergence vs convergence absolue).

*Si $\sum u_n$ converge absolument alors*[1] *$\sum u_n$ converge (La réciproque est fausse). De plus*

$$\boxed{\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|}.$$

[1]on rappelle ici que $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de l'espace $E$ qui est de ***dimension finie***.

# Séries dans une algèbre normée de dimension finie

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une algèbre normée de dimension finie d'élément unité $e$. La norme ici est une norme d'algèbre :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{A}^2,\ \|u \times v\| \leq \|u\| \|v\|.$$

**Théorème 1.3 (série géométrique de Neumann).**

*Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\|a\| < 1$. La* ***série géométrique*** $\sum_{n \geq 0} a^n$ *converge absolument et*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (e-a)^{-1}}. \qquad (a^0 = e)$$

## Théorème 1.4 (série exponentielle).

*Soit* $a \in \mathcal{A}$. *La* ***série exponentielle*** $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ *converge absolument et*

$$\boxed{\exp(a) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}}.$$

# Plan

**Définition 2.1** (ensemble dénombrable, au plus dénombrable.).

Un ensemble est dit ***dénombrable*** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, il est dit ***au plus dénombrable*** s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

1. $\mathbb{N}^*$ est dénombrable via $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ donnée par $\varphi(n) = n + 1$.
2. $\mathbb{Z}$ est dénombrable via $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(n) = n/2$ si $n$ est pair et $\varphi(n) = -(n+1)/2$ si $n$ est impair.
3. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable via $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ donnée par $\varphi(n, m) = 2^n(2m+1)$.

**Théorème 2.1** (parties infinies de $\mathbb{N}$).

*Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

**Corollaire 2.1.**

*Un ensemble est au plus dénombrable si, et seulement si, il est fini ou dénombrable.*

**Théorème 2.2** (opérations sur les ensembles dénombrables).

1. *Un produit cartésien **fini** d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*
2. *Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
3. *Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

1. Pour $p \geq 1$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
2. $\mathbb{Q} = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q}\right\}$ est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

## Théorème 2.3.

*Soit $I$ un ensemble au plus dénombrable. Si $\left(F_i\right)_{i\in J}$ est une partition*[1] *de $I$, alors $J$ est au plus dénombrable.*

[1] $I = \bigcup_{i\in J} F_i$ avec $F_i \cap F_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $F_i \neq \varnothing$ pour tout $i \in J$.

## Théorème 2.4.

*L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

# Plan

# Familles sommables de nombres réels positifs

Rappelle des propriétés basiques dans $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty] = [0, +\infty[ \bigcup \{+\infty\}$ :

- $\forall a \in \mathbb{R},\ a < +\infty, \quad (+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ et $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
- Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}^+}$ admet une borne supérieure : $\max \overline{\mathbb{R}^+} = +\infty$.

## Définition 3.1 (somme d'une famille de $\overline{\mathbb{R}^+}$).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}^+}$. On appelle ***somme*** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'élément $\sup\limits_{\substack{F\subset I\\ F \text{ finie}}} \sum\limits_{i\in F} u_i$. Cet élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ est noté $\sum\limits_{i\in I} u_i$ :

$$\boxed{\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{F\subset I\\ F \text{ finie}}} \sum_{i\in F} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \text{ tel que } F \text{ finie } \subset I\right\} \in \overline{\mathbb{R}^+}}.$$

## Proposition 3.1 (invariance de la somme par permutation).

*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $\overline{\mathbb{R}^+}$ et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection. On a dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'égalité :*

$$\boxed{\sum_{j\in I} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} u_i}.$$

## Définition 3.2 (famille sommable de réels positifs).

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^+$ est ***sommable*** si[1] $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, cela revient à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour toute partie finie $F$ de $I$,

$$0 \leq \sum_{i\in F} u_i \leq M.$$

[1] Dans le cas où la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i := +\infty$.

1. Les familles finies sont assurément sommables.
2. Soit $q \in [0,1[$ et $u_n = q^{|n|}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}.$$

- Pour toute partie $F$ finie de $\mathbb{Z}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F \subset [\![-N, N]\!]$, donc

$$\sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{n=-N}^{N} q^{|n|} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} q^n = 1 + 2q\frac{1-q^N}{1-q} \leq \frac{1+q}{1-q}.$$

- La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc sommable. De plus

$$\sum_{n=-N}^{N} q^{|n|} \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1+q}{1-q}.$$

D'où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \frac{1+q}{1-q}.$$

**Support d'une famille de $\mathbb{R}^+$**

1. Le ***support*** d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ est par définition l'ensemble
$$S = \Big\{ i \in I,\ \ u_i \neq 0 \Big\}.$$
2. Le support d'une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^+$ est au plus dénombrable. En effet :
   - $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \underbrace{\left\{ i \in I,\ \ u_i > \frac{1}{k} \right\}}_{=I_k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} I_k$. Si $M = \sum_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}^+$ alors
   $$M \geq \sum_{i\in I_k} u_i \geq \sum_{i\in I_k} \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\mathrm{Card}\, I_k,$$
   donc l'ensemble $I_k$ est fini.
   - $S$ s'exprime alors comme une réunion dénombrable d'ensembles finis, c'est donc un ensemble au plus dénombrable.

On se restreindra par la suite au cas où le domaine d'indexation $I$ est ***au plus dénombrable***.

**Proposition 3.2 (sommabilité des familles de réels positifs indexées par $\mathbb{N}$).**

*La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^+$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Dans ce cas,*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}.$$

## Proposition 3.3 (critère de comparaison).

*Si* $0 \leq u_i \leq v_i$ *pour tout* $i \in I$ *et* $(v_i)_{i\in I}$ *est sommable alors*[1] $(u_i)_{i\in I}$ *sommable et on a :*

$$\boxed{0 \leq \sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i}.$$

[1] La non sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$ entraine la non sommabilité de $(v_i)_{i\in I}$.

## Proposition 3.4 (opérations).

*Soient* $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_i)_{i\in I}$ *deux familles sommables de* $\mathbb{R}^+$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^+$. *Les familles* $\left(\lambda u_i\right)_{i\in I}$ *et* $\left(u_i + v_i\right)_{i\in I}$ *sont sommables et on a :*

$$\boxed{\sum_{i\in I}\left(\lambda u_i\right) = \lambda \sum_{i\in I} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I}\left(u_i + v_i\right) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i}.$$

## Théorème 3.1 (sommation par paquets positif).

*Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de* $\mathbb{R}^+$ *et* $(I_j)_{j\in J}$ *une partition de* $I$. *On a dans* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *l'égalité :*

$$\boxed{\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)}.$$

*En particulier, il est équivalent de dire :*

1. $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable;*
2. $\forall j \in J$, $(u_i)_{i\in I_j}$ *est sommable et la famille* $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ *est sommable.*

On pose, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $u_{i,j} = \dfrac{1}{(i+j+1)2^{i+j}}$.

Considérons la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ définie par

$$I_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ i+j = n\right\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n$ est fini donc la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I_n}$ est sommable. De plus, $\operatorname{Card} I_n = n+1$ et on a :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j} &= \sum_{(i,j)\in I_n} \frac{1}{(i+j+1)2^{i+j}}\\ &= \sum_{(i,j)\in I_n} \frac{1}{(n+1)2^n}\\ &= \frac{1}{(n+1)2^n} \sum_{(i,j)\in I_n} 1\\ &= \frac{\operatorname{Card} I_n}{(n+1)2^n} = \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

- La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge car géométrique.

D'où la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in I_n} u_{i,j}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\\ &= 2.\end{aligned}$$

## Théorème 3.2 (théorème de Fubini positif).

*Soit* $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *une famille de* $\mathbb{R}^+$*. On a dans* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *l'égalité :*

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)}.$$

*En particulier, il est équivalent de dire :*

1. $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable;*
2. $\forall i \in I,\ (u_{i,j})_{j\in J}$ *est sommable et la famille* $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ *est sommable.*

## Théorème 3.3 (théorème de Fubini positif (cas des suites doubles)).

*Soit* $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *une famille de* $\mathbb{R}^+$*. On a dans* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *l'égalité :*

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)}.$$

*En particulier, il est équivalent de dire :*

1. $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable;*
2. $\forall n\in\mathbb{N}$, *la série* $\sum\limits_{m\geq 0} u_{m,n}$ *converge et la série* $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ *converge.*

Considérons $u_{m,n} = \dfrac{n^m}{m!n!}$, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\geq 0} u_{m,n}$ converge par la règle de d'Alembert :
$$\frac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}} = \frac{n}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$
De plus
$$\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^m}{m!n!} = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!} = \frac{\mathrm{e}^n}{n!}.$$
- La série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)$ converge par la règle de d'Alembert :
$$\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\mathrm{e}^n} = \frac{\mathrm{e}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

😄 D'où la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n!}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

# Familles sommables de nombres réels ou de complexes

Dans ce paragraphe, $I$ désigne un ensemble au plus dénombrable (finie ou dénombrable).

- Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Pour tout $i \in I$, on introduit
$$\boxed{u_i^+ = \max(u_i, 0)} \text{ et } \boxed{u_i^- = \max(-u_i, 0)}.$$
- Les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ étant à termes ***positifs*** et pour tout $i \in I$,
$$\boxed{u_i = u_i^+ - u_i^-} \text{ et } \boxed{|u_i| = u_i^+ + u_i^-}.$$

## Définition 3.3 (famille sommable de réels ou de complexes).

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou de complexes est ***sommable*** si la famille $\left(|u_i|\right)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^+$ est sommable. Dans ce cas, on pose :

$$\boxed{\sum_{i\in I} u_i \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^- & \text{si} \quad (u_i)_{i\in I} \text{ est réelles.} \\ \displaystyle\sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \mathrm{i}\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i) & \text{si} \quad (u_i)_{i\in I} \text{ est complexes.} \end{cases}}$$

Le scalaire $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ est appelé la ***somme*** de la famille $(u_i)_{i\in I}$.

## Proposition 3.5.

*Si* $(u_i)_{i\in I}$ *est une famille de réels ou de complexes sommable et* $\varepsilon > 0$*, alors il existe une partie finie* $F$ *de* $I$ *telle que*

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| < \varepsilon.$$

## Proposition 3.6 (sommabilité des familles de réels ou de complexes indexées par $\mathbb{N}$).

*La famille* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels ou de complexes est sommable si, et seulement si, la série* $\sum u_n$ *converge absolument. Dans ce cas,*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n}.$$

## Proposition 3.7 (invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation).

*Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes et $\sigma : I \longrightarrow I$ une bijection. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $\left(u_{\sigma(j)}\right)_{j\in I}$ est sommable. Dans ce cas,*

$$\boxed{\sum_{j\in I} u_{\sigma(j)} = \sum_{i\in I} u_i}.$$

## Proposition 3.8 (critère de comparaison).

*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une familles de réels ou de complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une familles de $\mathbb{R}^+$.*

$$\begin{cases} \forall i \in I,\ |u_i| \leq v_i \\ (v_i)_{i\in I} \ \text{est sommable} \end{cases} \Longrightarrow (u_i)_{i\in I} \ \text{est sommable.}$$

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles de réels ou de complexes sommables.

## Proposition 3.9 (propriétés).

1. *Si* $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors* $\left(u_i + \lambda v_i\right)_{i\in I} \in \ell^1(I)$ *et on a :*

$$\boxed{\sum_{i\in I}\left(u_i + \lambda v_i\right) = \sum_{i\in I} u_i + \lambda \sum_{i\in I} v_i}.$$

   *En particulier,* $\ell^1(I)$ *est un* $\mathbb{K}$*-ev.*

2. *Si* $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$, *alors* $\boxed{\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leq \sum_{i\in I}|u_i|}$. *(Inégalité triangulaire)*

3. *Si* $J \subset I$ *et* $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$, *alors* $(u_i)_{i\in J} \in \ell^1(J)$. *(Une sous-famille d'une famille sommable est sommable)*

## Théorème 3.4 (sommation par paquets).

*Si* $(I_j)_{j\in J}$ *est une partition de* $I$ *et* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de réels ou de complexes sommable, alors*

$$\boxed{\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)}.$$

*En particulier, la famille* $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ *est sommable et elle a la même somme que* $(u_i)_{i\in I}$.

**Critère suffisant de sommabilité**
On vérifie l'hypothèse de sommabilité d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels ou de complexes en appliquant le théorème de sommation par paquets positifs, à la famille $\left(|u_i|\right)_{i\in I}$.

### Théorème 3.5 (théorème de Fubini).

*Si la famille* $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *de réels ou de complexes est sommable, alors*

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)}.$$

### Théorème 3.6 (théorème de Fubini (cas des suites doubles)).

*Si la famille* $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ *de réels ou de complexes est sommable, alors*

$$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)}.$$

Considérons $u_{m,n} = \dfrac{z^n n^m}{m!n!}$, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et $z \in \mathbb{C}^*$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m \geq 0} |u_{m,n}|$ converge par le critère de d'Alembert :
$$\left|\frac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}}\right| = \frac{n}{m+1} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$
De plus
$$\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}| = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n^m}{m!n!}|z|^n = \frac{|z|^n}{n!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!} = \frac{|z|^n\,\mathrm{e}^n}{n!}.$$
- La série $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} |u_{m,n}|\right)$ converge par le critère de d'Alembert :
$$\frac{|z|^{n+1}\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n\,\mathrm{e}^n} = \frac{|z|\,\mathrm{e}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'où la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\begin{aligned}\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^n n^m}{m!n!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n^m}{m!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n\,\mathrm{e}^n}{n!}\\ &= \mathrm{e}^{z\,\mathrm{e}}\end{aligned}.$$

## Corollaire 3.1 (cas d'une famille d'indices séparés).

*Si les familles de réels ou de complexes* $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_j)_{j\in J}$ *sont sommables, alors la famille* $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable et*

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right)}.$$

## Corollaire 3.2 (extension au produit d'un nombre fini de familles sommables).

*Si les familles de réels ou de complexes* $\left(u_{i_1}^{(1)}\right)_{i_1\in I_1}, \ldots, \left(u_{i_k}^{(k)}\right)_{i_k\in I_k}$ *sont sommables, alors la famille* $\left(u_{i_1}^{(1)} \ldots u_{i_k}^{(k)}\right)_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k}$ *est sommable et*

$$\boxed{\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k} u_{i_1}^{(1)} \ldots u_{i_k}^{(k)} = \left(\sum_{i_1\in I_1} u_{i_1}^{(1)}\right)\ldots\left(\sum_{i_k\in I_k} u_{i_k}^{(k)}\right)}.$$

# Application au produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

**Définition 3.4** (**produit de Cauchy de deux séries**).

On appelle ***produit de Cauchy*** des séries numériques $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ définie par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}}.$$

## Théorème 3.7 (convergence de la série produit de Cauchy).

*Si les séries numériques* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont* ***absolument convergentes****, alors leur produit de Cauchy* $\sum_{n\geq 0} w_n$ ***converge absolument*** *et la famille* $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable. Dans ce cas*

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_p v_q = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n}.$$

## Corollaire 3.3.

*Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie.*[1]
*Si $(u,v) \in \mathcal{A}^2$ tels que $uv = vu$, alors*

$$\boxed{\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)}.$$

[1]Parmi les cas fréquents : $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie.

Merci pour votre attention!