rappel MPSI

Séries numériques (correction)

Corrigé de l'exercice 1. **1.** Le terme général $(\cos n)_n$ ne tend pas vers zéro. En effet : $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ donc si $(\cos n)_n$ tend vers zéro alors $0 = -1$ ce qui est absurde. Ainsi, la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

2. $u_n = \dfrac{1}{n\,\mathrm{e}^{\ln n/n}} = \dfrac{1}{n}\underbrace{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln n/n}}}_{\longrightarrow 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann $\alpha = 1$) donc la série $\sum u_n$ diverge.

3. $u_n = \dfrac{1}{1+2^n/n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2^n}$. Or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2} < 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\sum \dfrac{n}{2^n}$ converge et la série $\sum u_n$ converge aussi.

4. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n^2}$ et $\sum \dfrac{\pi}{2n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc la série $\sum u_n$ converge.

5. $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n(n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$ et $\sum \dfrac{2}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc la série $\sum u_n$ converge.

6. $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc la série $\sum u_n$ converge.

7. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{27} < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

8. $|u_n| \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

9. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1$, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

10. $nu_n = \dfrac{n}{\ln(n^2)+\ln(1+1/n^2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge.

11. La suite $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_n$ est décroissante de limite nulle, d'après le critère de Leibniz, la série $\sum u_n$ converge.

12. $n^{3/2}u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série $\sum u_n$ converge.

13. $nu_n \underset{+\infty}{\sim} \ln\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

14. Une étude de fonction montre que $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Donc la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ est décroissante de limite nulle, d'après le critère de Leibniz, la série $\sum u_n$ converge.

15. La série $\sum u_n$ converge d'après le critère de Leibniz.

16. $|u_n| = \dfrac{1}{n}\left|\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), donc la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

17. $n^2|u_n| = \dfrac{n^2\ln n}{\mathrm{e}^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Donc la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

18. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, donc la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ sont de même nature. Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{+\infty} = +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge.

19. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-na}\dfrac{1}{(n+1)^{a-1}}$. Or $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-na} = \mathrm{e}^{-a+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-a}$.

- Si $a > 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a = 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} \in [0,1[$ et la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a < 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série $\sum u_n$ diverge.

D'où, la série $\sum u_n$ converge ssi $a \geq 1$.

20. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^a}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a < 2 \\ +\infty & \text{si} \quad a > 2 \\ 1/4 & \text{si} \quad a = 2 \end{cases}$. Ainsi la série $\sum u_n$ converge ssi $a \leq 2$.

Corrigé de l'exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{2n-n-1+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

La suite $(S_n)_n$ est croissante donc possède une limite ℓ finie ou infinie. Si ℓ est finie alors, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, $\ell-\ell\geq\frac{1}{2}$ ce qui est absurde donc $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Corrigé de l'exercice 3. **1.** La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq1}$ est décroissante de limite nulle. D'après le critère de Leibniz, la série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t&=-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{N}(-t)^{n-1}\right)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-t)^{n}\right)\mathrm{d}t\\&=-\int_0^1\frac{1-(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t\\&=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}+\int_0^1\frac{(-t)^N}{1+t}\mathrm{d}t=-\ln2+(-1)^N\int_0^1\frac{t^N}{1+t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

3. On a $\left|(-1)^N\int_0^1\frac{t^N}{1+t}\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^1 t^N\mathrm{d}t=\frac{1}{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$. D'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln2$.

Corrigé de l'exercice 4. **1.** $u_n\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère de Leibniz.
- $\sum\frac{1}{2n^2}$ et $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ convergent (série de Riemann).

Donc la série $\sum u_n$ converge.

2. $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

- $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ convergent par le critère de Leibniz.
- $\sum\frac{1}{n}$ diverge.
- $\sum o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge (série de Riemann).

Donc la série $\sum u_n$ diverge.

3. $u_n=\mathrm{e}-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\mathrm{e}-\exp\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\mathrm{e}-\mathrm{e}\times\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\mathrm{e}-\mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
Donc $u_n\underset{+\infty}{=}\frac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\mathrm{e}}{2n}$. Par suite, la série $\sum u_n$ diverge.

Corrigé de l'exercice 5. **1.** Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{N+1}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}u_n=1$.

2. $u_n=\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=\big(\ln(n+1)-\ln n\big)-\big(\ln n-\ln(n-1)\big)$ donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\big(\ln n-\ln(n-1)\big)-\big(\ln2-\ln(2-1)\big)=-\ln2.$$

3. Soit $N\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{3^n}=\sum_{n=0}^{N}3\frac{n+1-1}{3^{n+1}}=3\sum_{n=0}^{N}\frac{n+1}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{3^n}=3\sum_{n=1}^{N+1}\frac{n}{3^n}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{3^n}=3\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{3^n}+\frac{N+1}{3^N}-\frac{1-(1/3)^{N+1}}{1-1/3}$$

donc $\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{3^n} = \frac{-1}{2}\left(\frac{N+1}{3^N} - \frac{1-(1/3)^{N+1}}{2/3}\right)$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \frac{-1}{2}\left(\frac{N+1}{3^N} - \frac{1-(1/3)^{N+1}}{2/3}\right) = \frac{3}{4}$.

Corrigé de l'exercice 6. **1.** Supposons $\alpha \geq 0$. La fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$(n+1)^{-\alpha} \leq \int_n^{n+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \leq n^{-\alpha}$$

donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq n^{\alpha}\int_n^{n+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \leq 1$. Comme $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on obtient $n^{-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{n+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$.

De même pour $\alpha \leq 0$.

2. **a.** Pour $\alpha > 1$ la série $\sum_{k\geq 1} k^{-\alpha}$ converge donc par sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left((k+1)^{1-\alpha} - k^{\alpha}\right) = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

b. Pour $\alpha < 1$ la série $\sum_{k\geq 1} k^{-\alpha}$ diverge donc par sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

c. De même, pour $\alpha = 1$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

3. On a $\frac{1}{k^4 + \sqrt{k} + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4}$ donc par sommation des relations de comparaison, $R_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$. (Ici $\alpha = 4$)

4. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $u_n - \ell = o(1)$, donc $\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell) = o(n+1)$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$.

Corrigé de l'exercice 7. **1.** On a $|S_N| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{n=2}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\right| \leq \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|} = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{\sqrt{n}}{n-1}(S_n - S_{n-1}) \text{ avec la convention } S_1 = 0\\ &= \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)S_n + \frac{\sqrt{N+1}}{N}S_N.\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \geq 2$,

$$\left|\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)S_n\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)$$

Or la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)$ est une série convergente (téléscopique) donc par comparaison, la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)S_n$ est absolument convergente donc convergente.

4. On a $\frac{\sqrt{N+1}}{N}S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $(S_N)_N$ est bornée. Ainsi par opérations, les sommes partielles $\sum_{n=2}^{N} \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta)$ ont une limite finie et donc que la série converge.

Corrigé de l'exercice 8. **1.** On a u_n est le reste d'une série alternée. Par la majoration du reste on a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{\left((n+1)\ln(n+1)\right)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par comparaison, la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Corrigé de l'exercice 9. **1.** La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^s}$ est continue par morceaux et décroissante sur $[1,+\infty[$, donc pour tout $n \geq 2$:

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

donc par sommation, pour tout $N \geq 2$:

$$\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

2. On a $\left[\dfrac{t^{1-s}}{1-s}\right]_2^{N+1} \leq -1+\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^s} \leq \left[\dfrac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^{N}$ donc

$$1+\frac{1}{1-s}\left((N+1)^{1-s}-2^{1-s}\right) \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} \leq 1+\frac{1}{1-s}\left(N^{1-s}-1\right).$$

Quand $N\to+\infty$, $1+\dfrac{2^{1-s}}{s-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s} \leq 1+\dfrac{1}{s-1}$.

3. Par suite

$$\underbrace{2^{1-s}+(s-1)}_{\xrightarrow[s\to1^+]{}1} \leq (s-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \leq \underbrace{s}_{\xrightarrow[s\to1^+]{}1}.$$

D'où : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s} \underset{s\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.

Corrigé de l'exercice 10. **1.** D'une part, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\,]0,1[$ (récurrence sur n) et d'autre part, on a $u_{n+1}-u_n=-u_n^2\leq 0$ donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minoré donc converge vers une limite $\ell\in\mathbb{R}$ telle que $\ell=\ell-\ell^2$ donc $\ell=0$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On a $\sum_{n=0}^{N}u_n^2=\sum_{n=0}^{N}u_n-u_{n+1}=u_0-u_{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}u_0$. Donc la série $\sum u_n^2$ converge de somme u_0.

3. On a $\ln(1-u_n)=\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$ donc $\sum_{n=0}^{N}\ln(1-u_n)=\sum_{n=0}^{N}\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\ln(u_{N+1})-\ln(u_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}-\infty$ et la série $\sum\ln(1-u_n)$ diverge.

4. Comme $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ on peut écrire $\ln(1-u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-u_n$. La suite $(u_n)_n$ étant de signe constant donc la série $\sum u_n$ diverge.

Corrigé de l'exercice 11. **1.** La fonction $t\longmapsto(\ln t)^2$ est croissante sur $[1,+\infty[$, on a pour $k\geq 2$:

$$\int_{k-1}^{k}(\ln t)^2\mathrm{d}t \leq (\ln k)^2 \leq \int_{k}^{k+1}(\ln t)^2\mathrm{d}t$$

en sommant les inégalités, on obtient, pour $n\geq 2$,

$$\int_{1}^{n}(\ln t)^2\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2 \leq \int_{2}^{n+1}(\ln t)^2\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_{1}^{n}(\ln t)^2\mathrm{d}t=[t\ln t]_1^n-2\int_1^n\ln t\mathrm{d}t=n(\ln n)^2-2(n\ln n-n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}n(\ln n)^2$$

de même, $\int_{2}^{n+1}(\ln t)^2\mathrm{d}t\underset{n\to+\infty}{\sim}n(\ln n)^2$. D'où

$$\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2\underset{n\to+\infty}{\sim}n(\ln n)^2.$$

2. La fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$, on a pour $k\geq 3$:

$$\int_{k}^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \frac{1}{k\ln k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

en sommant les inégalités, on obtient, pour $n\geq 3$,

$$\int_{3}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln k} \leq \int_{2}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

en ajoutant le premier terme de la somme, on obtient :

$$\frac{1}{2\ln 2}+\int_{3}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k} \leq \frac{1}{2\ln 2}+\int_{2}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

Or

$$\frac{1}{2\ln 2}+\int_{3}^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\frac{1}{2\ln 2}+[\ln(\ln t)]_3^{n+1}=\frac{1}{2\ln 2}+\ln\left(\ln(n+1)\right)-\ln(\ln 3)\sim\ln(\ln n).$$

De même, on obtient $\dfrac{1}{2\ln 2}+\int_{2}^{n}\dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\sim\ln(\ln n)$. D'où

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(\ln n).$$

Corrigé de l'exercice 12. **1.** On a $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=-1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{=}-1+\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\underset{+\infty}{=}O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. Comme la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge, alors la série $\sum\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge i.e. la série téléscopique $\sum\big(\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)\big)$ converge et par suite, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_n$ converge vers un réel $\lambda\in\mathbb{R}$. D'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{\lambda}>0$. Posons alors $k=e^{-\lambda}>0$ de sorte que

$$n!\underset{+\infty}{\sim}k\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

3. On a $\frac{n!}{n^n}e^n\underset{+\infty}{\sim}\frac{k\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n^n}e^n=k\sqrt{n}$. D'où la série $\sum\frac{n!}{n^n}e^n$ diverge (grossièrement).

Corrigé de l'exercice 13. **1.** La fonction $f:t\longmapsto\frac{1}{t(\ln t)^{\beta}}$ définie sur $[2,+\infty[$ est dérivable et $f'(t)=-\frac{\beta+\ln t}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$. Par suite, f' est négative sur $\left[e^{-\beta},+\infty\right[$. La fonction f est positive et décroissante sur $\left[\max(2,e^{-\beta}),+\infty\right[$ et une primitive F de f est alors

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-\beta}(\ln t)^{1-\beta} & \text{si}\quad \beta\neq 1\\ \ln(\ln t) & \text{si}\quad \beta=1\end{cases}$$

Donc F admet une limite finie si, et seulement si, $\beta>1$ et le théorème de comparaison à une intégrale montre que la série de terme général $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ converge si, et seulement si, $\beta>1$.

2. On a $\frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^{\beta}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc $\frac{1}{nu_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et par suite $\frac{1}{n}\underset{+\infty}{=}o(u_n)$. Comme la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge alors par comparaison, la série $\sum u_n$ diverge aussi.

3. Soit $\alpha'\in\mathbb{R}$ tel que $1<\alpha'<\alpha$. On a

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}=\frac{1}{n^{\alpha'}}\underbrace{\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right).$$

Donc il suffit de prendre $\gamma=\alpha'=\frac{\alpha+1}{2}>1$. Comme la série $\sum\frac{1}{n^{\gamma}}$ converge car $\gamma>1$ alors par comparaison, la série $\sum u_n$ converge aussi.

4. D'après ce qui précède On obtient

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}\ \text{converge}\iff\begin{cases}\alpha>1\\ \text{ou}\\ \alpha=1\ \text{et}\ \beta>1\end{cases}.$$

5.

- Pour $n\geq 1$, $n!\leq n^n$ donc $u_n\geq\frac{1}{n\ln n}$. Comme la série $\sum\frac{1}{n\ln n}$ diverge ($\alpha=\beta=1$), la série $\sum u_n$ diverge.
- On a $u_n=e^{(\ln n)^2/n}-1$ et comme $(\ln n)^2/n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on peut écrire $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{(\ln n)^2}{n}$. Or la série $\sum\frac{(\ln n)^2}{n}$ diverge car ($\alpha=1$ et $\beta=-2$) donc par comparaison, la série $\sum u_n$ diverge.
- Pour $a>1$, on a $u_n=\frac{1}{n^{-\ln(\ln a)}}$. donc $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $-\ln(\ln a)>1$ si, et seulement si, $a<e^{1/e}$.