Séries numériques (rappel MPSI)

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce paragraphe et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Suites et séries

Généralités

Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1.1. **série, somme, reste**

1. On appelle ***série de terme général*** u_n la suite $\left(S_n\right)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.

2. Pour n fixé, S_n s'appelle ***somme partielle*** de la série $\sum u_n$.

3. On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** lorsque la suite $\left(S_n\right)_n$ converge. Dans ce cas :

a. Sa limite est alors appelée ***somme*** de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

b. La différence $R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelé ***reste d'ordre*** n de la série.

4. Lorsque la série ne converge pas, on dit qu'elle ***diverge***.

Remarque 1.1. ■ Si $\sum u_n$ converge alors $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 1.1. **condition nécessaire de convergence**

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (La réciproque est fausse.)

Remarque 1.2. ■ Si la suite $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ ***diverge grossièrement***.

Proposition 1.2. **série géométrique**

Soit $z \in \mathbb{C}$. La ***série géométrique*** $\sum z^n$ converge si, et seulement si, $|z| < 1$ et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ pour } |z| < 1}$.

Proposition 1.3. **lien suite-série**

La suite $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, la ***série télescopique*** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Dans ce cas[1],

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0}.$$

1. La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_n$ sont de même nature.

Espace vectoriel des suites dont la série converge

Proposition 1.4. **linéarité de la somme**

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge. De plus

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n}.$$

Proposition 1.5.

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, les séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. Dans ce cas, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)}$.

2 Séries à termes positifs

Proposition 2.1. **convergence d'une série à termes positifs**

Soit $\sum u_n$ une série à termes ***positifs***. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ est majorée.

Dans ce cas, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)}$. Dans le cas où la série $\sum u_n$ diverge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 2.2. **comparaison**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes ***positifs***.

1. $\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leq v_n \\ \quad \text{et} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum u_n \text{ converge} \\ \quad \text{et} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \end{array}\right.$.

2. $\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \\ \quad \text{et} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right. \Longrightarrow \sum u_n$ converge.

3. $\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \\ \quad \text{et} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array}\right. \Longrightarrow \sum u_n$ converge.

4. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont} \\ \text{de même nature.} \end{array}\right.$

Proposition 2.3. **séries de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de ***Riemann*** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Proposition 2.4. **comparaison aux séries de Riemann**

Soit $\sum u_n$ une série à termes ***positifs***.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \le 1$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sum u_n$ diverge.

3 Séries de nombres réels ou complexes

Convergence absolue et comparaison

Définition 3.1. **convergence absolue**

La série $\sum u_n$ est dite ***absolument convergente*** lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3.1. **convergence vs convergence absolue**

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge (La réciproque est fausse). De plus $\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}$.

Proposition 3.1. **comparaison et convergence absolue**

Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes ***positifs***.

1. $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \\ \text{et} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \sum u_n$ converge absolument

2. $\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \\ \text{et} \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \sum u_n$ converge absolument

Théorème 3.2. **série exponentielle**

Soit $z \in \mathbb{C}$. La ***série exponentielle*** $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et $\boxed{\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$.

Théorème 3.3. **règle de d'Alembert**

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique ***non nulle*** à partir d'un certain rang telle que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
2. Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum u_n$.

Théorème 3.4. **sommation des relations de comparaison**

Soit (u_n) une suite numérique et (v_n) une suite de réels ***positifs*** à partir d'un certain rang.

1. Supposons que la série $\sum v_n$ converge.
   - **a.** $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
   - **b.** $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
   - **c.** $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

2. Supposons que la série $\sum v_n$ diverge.
   - **a.** $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   - **b.** $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   - **c.** $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Séries alternées

Définition 3.2. **série alternée**

On appelle ***série alternée*** une série de la forme $\sum(-1)^n u_n$ avec $u_n \geq 0$.

Théorème 3.5. **critère de Leibniz**

Soit (u_n) une suite réelle ***décroissante***, ***positive*** et de ***limite nulle***. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

1. La série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

2. Les suites extraites paires et impaires $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes de même limite $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n$.

3. Le reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $\boxed{|R_n| \leq u_{n+1}}$.

Comparaison d'une série à une intégrale

Proposition 3.2. **encadrement**

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et monotone.

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p < q$, $\begin{cases} \displaystyle\int_{p+1}^{q+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p}^{q} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } f \text{ est décroissante} \\ \displaystyle\int_{p}^{q} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=p+1}^{q} f(n) \leq \int_{p+1}^{q+1} f(t)\mathrm{d}t & \text{si } f \text{ est croissante} \end{cases}$

Théorème 3.6. **comparaison à une intégrale**

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ***continue par morceaux***, ***positive*** et ***décroissante***.

$$\sum_{n\geq 0} f(n) \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

4 Analyse asymptotique

Proposition 4.1. **croissances comparées**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha, \beta > 0$ et $q > 1$.

1. $q^{-n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

2. $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\ln^\beta n\right)$.

3. $\ln^\beta n \underset{+\infty}{=} o(n^\alpha)$.

4. $n^\alpha \underset{+\infty}{=} o(q^n)$.

5. $q^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$.

6. $n! \underset{+\infty}{=} o(n^n)$.

Proposition 4.2.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha, \beta > 0$.

1. $\ln^\beta x \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$.

2. $x^\beta \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\alpha x})$.

3. $|\ln x|^\beta \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.

4. $\mathrm{e}^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

Proposition 4.3. **équivalents classiques au voisinage de 0**

1. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

2. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

3. $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

4. $\tan x \underset{0}{\sim} x$.

5. $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$.

6. $\arctan x \underset{0}{\sim} x$.

7. $\sinh x \underset{0}{\sim} x$.

8. $\tanh x \underset{0}{\sim} x$.

9. $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

10. $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

11. $1 - \cosh x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Développements limités en 0 des fonctions usuelles
$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cosh x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sinh x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$
$\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

5 Une sélection d'exercices

Exercice 5.1 : Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \cos n$.
2. $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.
3. $u_n = \frac{n}{2^n + n}$.
4. $u_n = \frac{\arctan n}{n^2}$.
5. $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$.
6. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.
7. $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.
8. $u_n = \frac{\sin n}{n^2+n+1}$.
9. $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
10. $u_n = \frac{1}{\ln(1+n^2)}$.
11. $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.
12. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$.
13. $u_n = \frac{\ln\sqrt{n}}{n+1}$.
14. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.
15. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$.
16. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
17. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{e^n}$.
18. $u_n = \frac{1}{n \ln n}$.
19. $u_n = \frac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$.
20. $u_n = \frac{(n!)^a}{(2n)!}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.2 : `Série harmonique.` On note, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.
Montrer que $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Exercice 5.3 : `Série harmonique alternée.`

1. Justifier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
2. Montrer $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2 + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^N}{1+t} dt$. **Indication :** remarquons que $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt$.
3. En déduire la somme de la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 5.4 : Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes : $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice 5.5 : Calculer la somme des séries $\sum u_n$ suivantes : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$, $u_n = \frac{n}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.6 : `Classique.`

1. Montrer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $n^{-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_n^{n+1} t^{-\alpha} dt$. **Indication :** utiliser la monotonie de la fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}$.
2. En déduire

a. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ si $\alpha>1$. **b.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha<1$. **c.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{+\infty}{\sim}\ln n$.

3. **Exemple :** Donner un équivalent, quand $n\to+\infty$, de $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^4+\sqrt{k}+1}$.

4. **Application :** Montrer que, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell\in\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k=\ell$. (moyenne ce Cesàro)

Exercice 5.7 : `Transformation d'Abel.` Soit $\theta\in\,]0,\pi[$. Pour tout $N\geq 2$, on pose $S_N=\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\cos(n\theta)$.

1. Montrer $|S_N|\leq\dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.
2. Montrer que pour tout $N\geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta)=\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)S_n+\frac{\sqrt{N+1}}{N}S_N$.

Indication : $\cos(n\theta)=S_n-S_{n-1}$ avec la convention $S_1=0$.

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right)S_n$ converge.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta)$ converge.

Exercice 5.8 : Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k\ln k)^2}$. **Indication :** utiliser la majoration du reste.

Exercice 5.9 : `Classique.` Soit $s>1$.

1. Montrer que, pour tout $N\geq 2$, $\displaystyle\int_2^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}\leq\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^s}\leq\int_1^{N}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$. **Indication :** utiliser la décroissance de $t\longmapsto\dfrac{1}{t^s}$ sur $[1,+\infty[$.
2. Montrer $1+\dfrac{2^{1-s}}{s-1}\leq\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\leq 1+\frac{1}{s-1}$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\underset{s\to1^+}{\sim}\frac{1}{s-1}$.

Exercice 5.10 : `Lien suite-série.` Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0\in\,]0,1[$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n-u_n^2$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. Étudier la convergence et donner la somme de la série $\sum u_n^2$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum\ln(1-u_n)$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 5.11 : `Comparaison à une intégrale.` Déterminer un équivalent simple quand $n\longrightarrow+\infty$ de :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2$.
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 5.12 : `Formule de Stirling.` On considère la suite (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.

1. Montrer $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)\underset{+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire qu'il existe $k>0$ tel que $n!\underset{+\infty}{\sim}k\sqrt{n}n^n\,\mathrm{e}^{-n}$. $\left(k=\sqrt{2\pi}\right)$
3. **Application :** Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n$.

Exercice 5.13 : `Séries de Bertrand.` Soit α et β deux réels. Pour tout $n\geq 2$, on pose $u_n=\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$.

1. Supposons $\alpha=1$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\beta>1$.
2. Supposons $\alpha<1$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\underset{+\infty}{=}o(u_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
3. Supposons $\alpha>1$. Chercher un réel $\gamma>1$ tel que $u_n\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
4. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$ ou $\left(\alpha=1\text{ et }\beta>1\right)$.
5. **Application :** Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes : $u_n=\dfrac{1}{\ln n!}$, $u_n=n^{\ln n/n}-1$, $u_n=\left(\ln a\right)^{\ln n}$, $a>1$.