Suites et séries de fonctions

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et X une partie de E.

1 Modes de convergences d'une suite de fonctions

On désigne par $\left(f_n\right)_n$ une ***suite de fonctions*** de X vers F i.e. pour chaque n, f_n est une fonction de X vers F et f une fonction définie de X vers F.

Convergence simple

Définition 1.1. **convergence simple (CS)**

On dit que $\left(f_n\right)_n$ ***converge simplement*** vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ si $\boxed{\forall x \in X,\ \ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$.

Autrement dit

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon}.$$

Dans ce cas, on dit [1] alors que f est la ***limite simple*** de $\left(f_n\right)_n$.

1. Il y a unicité de la fonction vers laquelle une suite de fonctions peut converger simplement.

Exemple 1.1. ■ $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$ fixé. On a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[0,1]$.

Convergence uniforme

Définition 1.2. **convergence uniforme (CU)**

On dit que $\left(f_n\right)_n$ ***converge uniformément*** vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq N \implies \forall x \in X,\ \ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon}.$$

Dans ce cas, On dit alors que f est la ***limite uniforme*** de $\left(f_n\right)_n$.

Proposition 1.1. **CU vs CS**

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur } X \implies f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \text{ sur } X.$$

Théorème 1.1. **condition nécessaire et suffisante de la CU**

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur } X \iff \begin{cases} \bullet\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \text{ sur } X \\ \bullet\ \sup\limits_{x\in X}\|f_n(x) - f(x)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{cases}$$

Exemple 1.2. Convergence uniforme de $f_n(x) = \sqrt{n}x^n(1-x)$ sur $[0,1]$.

- Par croissances comparées, si $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}x^n = 0$. De plus $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc pour tout $x \in [0,1]$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ sur $[0,1]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f_n'(x) = \sqrt{n}x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,\mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,\mathrm{e}^{-1+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}}.$$

D'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur $[0,1]$.

Convergence en norme uniforme

On menu l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X,F)$ des fonctions bornées de X vers F par la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X,F),\ \ \|f\|_{\infty,X} = \sup_{x\in X}\|f(x)\|_F.$$

Théorème 1.2. **caractérisation à l'aide de la norme de la convergence uniforme**

Soient $f \in \mathcal{B}(X,F)$ et $f_n \in \mathcal{B}(X,F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\boxed{f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \iff \|f_n - f\|_{\infty,X} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

2 Approximations uniformes

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

Définition 2.1. **subdivision, fonction en escalier**

1. On appelle ***subdivision*** d'un segment $[a, b]$ toute suite réelle finie $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ avec

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

2. Une fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de φ à $]a_{i-1}, a_i[$ est constante [1].

1. Une telle subdivision est alors dite ***adaptée*** à φ.

Théorème 2.1. **approximation par des fonctions en escalier**

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K} \ \text{ fonction en escalier telle que } \ \|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon}.$$

Remarque 2.1. ■ En d'autres termes, toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

■ L'espace des fonctions en escaliers de $[a, b]$ vers $\mathbb{K}$ est une partie dense de l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par la norme de la convergence uniforme $\|.\|_{\infty,[a,b]}$.

Application 2.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue).

■ Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Cas f constante.
  $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in [a, b],\ f(x) = \lambda$. On a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\lambda\left[\frac{\mathrm{e}^{inx}}{in}\right]_a^b\right| = |\lambda|\left|\frac{\mathrm{e}^{inb} - \mathrm{e}^{ina}}{in}\right| \leq \frac{2|\lambda|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Cas f en escalier.
  Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{j=1}^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} \underbrace{f_{|]a_{j-1},a_j[}(x)}_{\text{constant}=\lambda_j}\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^p \left|\int_{a_{j-1}}^{a_j} \lambda_j\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{(d'après le premier cas)}\end{aligned}$$

- Cas f continue par morceaux.
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier telle que : $\forall x \in [a, b],\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. D'après le deuxième cas, $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que : $n \geq N \Longrightarrow \displaystyle\left|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
  Pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_a^b \big(f(x) - \varphi(x)\big)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

  Par suite, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 2.2. **théorème de Weierstrass**

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K} \ \text{ fonction polynomiale telle que } \ \|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon}.$$

Remarque 2.2. ■ En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

■ L'espace des fonctions polynomiales de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ est une partie dense de l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par $\|.\|_{\infty,[a,b]}$.

3 Analyse de la limite d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur X à valeurs dans F et f une fonction définie sur X vers F.

Continuité par convergence uniforme

Théorème 3.1. **continuité locale**

$$\begin{cases} \bullet \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \text{ est continue en } x_0 \in X \\ \bullet \ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur un voisinage de } x_0 \text{ dans } X \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est continue en } x_0.$$

Théorème 3.2. **continuité globale**

$$\begin{cases} \bullet \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \text{ est continue sur } X \\ \bullet \ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur tout compact } \subset X \end{cases} \Longrightarrow f \text{ est continue sur } X.$$

On remplace la CU sur tout compact par la CU sur tout segment lorsque la variable est réelle.

Exemple 3.1. ■ La suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car la limite simple n'est pas continue sur $[0,1]$.

Théorème de la double limite

Théorème 3.3. **interversion des limites**

Soit $a \in \overline{X}$.

$$\begin{cases} \bullet \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n \text{ (limite finie)} \\ \bullet \ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur un voisinage de } a \text{ dans } X \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ la suite } (\ell_n)_n \text{ admet une limite finie} \\ \bullet \ \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) \end{cases}.$$

Ce résultat peut être adapté en $a = \pm\infty$ d'une fonction définie sur un intervalle réel non borné.

Intégration sur un segment

Théorème 3.4.

Ici X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in X$.

On suppose que les f_n sont continues sur X et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur tout segment $\subset X$. Posons, pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors $\Phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} \Phi$ sur tout segment $\subset X$.

Corollaire 3.1. **interversion limite intégrale**

On suppose $X = [a,b]$.

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur } [a,b] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t \end{cases}.$$

Dérivation

Ici, le domaine de définition X est un intervalle réel I d'intérieur non vide.

Théorème 3.5. **caractère $\mathcal{C}^1$**

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \bullet\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \text{ sur } I \\ \bullet\ f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} g \text{ sur tout segment } \subset I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \bullet\ f' = g \\ \bullet\ \forall t \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(t) \end{cases}.$$

Théorème 3.6. **caractère $\mathcal{C}^p$**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall k \in [\![0,p-1]\!],\ \left(f_n^{(k)}\right)_n \text{ CS sur } I \\ \bullet\ \left(f_n^{(p)}\right)_n \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ \text{la limite simple } f \text{ de } \left(f_n\right)_n \text{est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall t \in I,\ \forall k \in [\![0,p]\!],\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(t) \end{cases}.$$

Corollaire 3.2. **caractère $\mathcal{C}^\infty$**

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \bullet\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(f_n^{(k)}\right)_n \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \bullet\ \forall t \in I,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(t) \end{cases}.$$

4 Modes de convergences d'une série de fonctions

On désigne par $\sum f_n$ une ***série de fonctions*** de X vers F i.e. pour chaque n, f_n est une fonction de X vers F.
On note, pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$: la ***somme partielle d'ordre*** n de la série $\sum f_n$.

Convergence simple et convergence uniforme

Définition 4.1. **convergence simple et uniforme d'une série de fonctions**

1. On dit que $\sum f_n$ ***converge simplement*** sur X si, pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge i.e. la suite $\left(S_n\right)_n$ de ses sommes partielles converge simplement sur X. Dans le cas de convergence, on note :

- S la ***somme*** de la série $\sum f_n$: $\forall x \in X,\quad S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
- R_n le ***reste d'ordre*** n de la série $\sum f_n$: $\forall x \in X,\quad R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

2. On dit que $\sum f_n$ ***converge uniformément*** sur X lorsque la suite $\left(S_n\right)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur X.

Exemple 4.1. ■ $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

- Soit $x \in [0,1]$. On a $|n^2 f_n(x)| \leq n^{3/2} x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $x \in [0,1[$ par croissances comparées, et pour $x = 1$, on a $n^2 f_n(1) = n^{3/2} \mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum f_n$ CS sur $[0,1]$.

Théorème 4.1. **condition nécessaire et suffisante de la CU**

$$\sum f_n \text{ CU sur } X \iff \begin{cases} \bullet \ \sum f_n \text{ CS sur } X \\ \bullet \ R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0 \text{ sur } X. \end{cases}$$

Remarque 4.1 (Pratique).

■ Pour étudier la convergence uniforme de la suite $(R_n)_n$ des restes, on peut déterminer une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \|R_n(x)\|_F \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

Exemple 4.2. ■ $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

- La série $\sum f_n$ CS sur $[0,1]$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(x\,\mathrm{e}^{-x})^k}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{k}}. \qquad (x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x} \text{ est croissante sur } [0,1])$$

Or la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}$ converge d'après la règle de d'Alembert et donc le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par suite $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur $[0,1]$.

D'où la série $\sum f_n$ CU sur $[0,1]$.

Convergence normale

Définition 4.2. **convergence normale (CN)**

On dit que $\sum f_n$ ***converge normalement*** sur X lorsque :

- Pour tout n, f_n est bornée sur X.
- La série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,X}$ converge.

Remarque 4.2 (Pratique).

■ Pour étudier la convergence normale de la série $\sum f_n$, on peut déterminer une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \|f_n(x)\|_F \leq \alpha_n \quad \text{et la série} \quad \sum \alpha_n \text{ converge}}.$$

Exemple 4.3. ■ $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

- $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |f_n(x)| \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}$. La série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}$ étant convergente car $\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

D'où la série $\sum f_n$ CN sur $[0,1]$.

Proposition 4.1. **CN vs CU**

$$\sum f_n \text{ CN sur } X \implies \sum f_n \text{ CU sur } X.$$

Convergence absolue

Définition 4.3. **convergence absolue (CA)**

On dit que $\sum f_n$ ***converge absolument*** sur X lorsque la série $\sum \|f_n(x)\|_F$ est convergente pour tout $x \in X$.

Proposition 4.2. **CN vs CA**

$$\sum f_n \text{ CN sur } X \implies \sum f_n \text{ CA sur } X.$$

Remarque 4.3. En résumé, on a les implications suivantes, pour une série de fonctions :

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\text{Convergence uniforme}} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\boxed{\text{Convergence normale}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\text{Convergence simple}} \\
& \boxed{\text{Convergence absolue}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Toute implication non écrite étant fausse.

5 Analyse de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de X vers F de somme S : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ où $x \in X$ tel que $\sum f_n(x)$ converge.

Continuité de la somme d'une série de fonctions

Théorème 5.1. **continuité locale**

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\quad f_n \text{ est continue en } x_0 \in X \\ \bullet\ \sum f_n \text{ CU sur un voisinage de } x_0 \text{ dans } X \end{cases} \implies \text{la somme } S \text{ est continue en } x_0.$$

Théorème 5.2. **continuité globale**

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\quad f_n \text{ est continue sur } X \\ \bullet\ \sum f_n \text{ CU sur un tout compact de } X \end{cases} \implies \text{la somme } S \text{ est continue sur } X.$$

On remplace la CU sur tout compact par la CU sur tout segment lorsque la variable est réelle.

Exemple 5.1. L'application $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- Par le critère de Leibniz, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- Soit $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \underbrace{\leq}_{\substack{\text{majoration du reste} \\ \text{par le premier terme}}} \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc la série $\sum f_n$ CU sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

D'où l'application $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc continue sur $]0,+\infty[$.

Proposition 5.1.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie d'élément unité e et B la boule unité ouverte.

1. $a \longmapsto (e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ est continue sur B.
2. $a \longmapsto \exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ est continue sur $\mathcal{A}$.

Limite et comportement asymptotique

Théorème 5.3. **interversion des limites**

Soit $a \in \overline{X}$.

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n \text{ (limite finie)} \\ \bullet\ \sum f_n \text{ CU sur un voisinage de } a \text{ dans } X \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ \sum \ell_n \text{ converge} \\ \bullet\ \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right). \end{cases}$$

Ce résultat peut être adapté en $a = \pm\infty$ d'une série de fonctions définie sur un intervalle réel non borné.

Exemple 5.2. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0,+\infty[$.

On a $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$ et la série $\sum f_n$ CU sur $[c,+\infty[$ pour tout $c>0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

En revanche, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ car sinon, on obtient la convergence de la série $\sum(-1)^{n+1}$ puisque $f_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell_n = (-1)^{n+1}$.

Intégration sur un segment

Théorème 5.4. **interversion somme intégrale**

On suppose $X = [a,b]$.

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ \sum f_n \text{ CU sur } [a,b] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ \text{la somme } S \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right). \end{cases}$$

Exemple 5.3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|>1$. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z-\mathrm{e}^{it}}$.

- Soit $|z|>1$ et $t \in [0,2\pi]$. On a $\frac{1}{z-\mathrm{e}^{it}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{it}}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{it}}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{int}}{z^{n+1}}$.
- On pose $f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{int}}{z^{n+1}}$.
  - $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,2\pi]$.
  - $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty,[0,2\pi]} = \frac{1}{|z|^{n+1}}$. Or $\sum \frac{1}{|z|^{n+1}}$ converge car $|z|>1$, donc la série $\sum f_n$ CN sur $[0,2\pi]$ donc CU sur $[0,2\pi]$. Par suite

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z-\mathrm{e}^{it}} = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{int}}{z^{n+1}}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{z^{n+1}}\mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}}\left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{0,n}}\right) = \frac{2\pi}{z}.$$

Dérivation

Ici, le domaine de définition X est un intervalle réel I d'intérieur non vide.

Théorème 5.5. **caractère $\mathcal{C}^1$**

$$\begin{cases} \bullet \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \bullet \ \sum f_n \text{ CS sur } I \\ \bullet \ \sum f_n' \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet \ \text{la somme } S \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \bullet \ \forall t \in I, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t). \end{cases}$$

Théorème 5.6. **caractère $\mathcal{C}^p$**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \bullet \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \bullet \ \forall k \in [\![0, p-1]\!], \ \sum f_n^{(k)} \text{ CS sur } I \\ \bullet \ \sum f_n^{(p)} \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet \ \text{la somme } S \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \bullet \ \forall t \in I, \ \forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(t). \end{cases}$$

Corollaire 5.1. **caractère $\mathcal{C}^\infty$**

$$\begin{cases} \bullet \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \bullet \ \sum f_n \text{ CS sur } I \\ \bullet \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sum f_n^{(k)} \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \bullet \ \text{la somme } S \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \bullet \ \forall t \in I, \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(t). \end{cases}$$

Exemple 5.4. ■ $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$, $n \in \mathbb{N}^*, x \in]1, +\infty[$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}$.
- $\sum f_n$ CS sur $]1, +\infty[$.
- Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$. On a $\forall x \in [a, b]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f_n^{(k)}(x)| = \left|\dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}\right| \leq \dfrac{(\ln n)^k}{n^a} = \alpha_n$. La série $\sum \alpha_n$ converge car $n^{\frac{1+a}{2}} \alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\dfrac{1+a}{2} > 1$, donc la série $\sum f_n^{(k)}$ CN donc CU sur $[a, b]$.

Par suite, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Proposition 5.2.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in \mathcal{A}$.

1. l'application $\mathrm{e}_a : t \longmapsto \mathrm{e}_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!} a^n$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e}_a^{(k)}(t) = a^k \, \mathrm{e}_a(t) = \mathrm{e}_a(t) a^k}.$$

2. $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $\quad \boxed{\mathrm{e}_a(s+t) = \mathrm{e}_a(s)\,\mathrm{e}_a(t) = \mathrm{e}_a(t)\,\mathrm{e}_a(s)}$ $\quad$ et $\quad \boxed{\left(\mathrm{e}_a(t)\right)^{-1} = \mathrm{e}_a(-t)}$.