TD N°3

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1 Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. `Deux décomposition classiques.`

1. Soient $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ M^\top = M\right\}$ l'ev des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ M^\top = -M\right\}$ l'ev des matrices antisymétriques. Montrer

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

2. Soit E un ev et H un hyperplan de E. Montrer $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$ pour tout $a \in E \setminus H$.
On rappelle que H est un hyperplan de E si $H = \ker\varphi$ où φ une forme linéaire non nulle sur E.

Exercice 2. Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose, pour $0 \leq i \leq n$, $\ F_i = \left\{P \in E,\ \text{tel que } \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ \ P(j) = 0\right\}$.
Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels d E et que $E = F_0 \oplus \ldots \oplus F_n$.

Exercice 3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ \mathrm{O}_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ \mathrm{O}_n & A^k \end{pmatrix}$ et que si, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $M \in \mathcal{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ et $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \\ \mathrm{O}_n & A^{-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient $A \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$. Calculer $\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_2} & B \\ C & A \end{pmatrix}$.

Indication : utiliser une transvection par blocs sur les colonnes.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer $\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$. **Indication :** utiliser des transvections par blocs.

Exercice 6. `Matrices commutant avec une matrice diagonale (d'après CNC 2021).`

1. Soient $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale telle que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distints deux à deux et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D : $AD = DA$. Montrer que A est une matrice diagonale.

2. Soient $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1 \mathrm{I}_{n_1}, \ldots, \lambda_r \mathrm{I}_{n_r}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale par blocs telle que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distincts deux à deux et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D : $AD = DA$.
Montrer que A est diagonale par blocs de la forme $A = \mathrm{diag}\left(A_1, \ldots, A_r\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$, $1 \leq i \leq r$.

2 Sous-espaces stables, éléments propres

Exercice 7. Soient E un ev, F un sev de E et $\left(e_i\right)_{i\in I}$ une famille génératrice de F : $F = \mathrm{Vect}\left(e_i,\ i \in I\right)$.
Montrer que F est stable par u si, et seulement si, $\forall i \in I,\ u(e_i) \in F$.

Exercice 8. Soient E un ev et $x \in E$ non nul. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par u si, et seulement si, x est vecteur propre de u.

Exercice 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe λ valeur propre de u tel que $u^2 = \lambda u$.

Exercice 10. `Classique.` Soient E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ non nul.

1. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre et $\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), u^p(x)\right)$ est liée.

2. Montrer alors que l'espace $F_x = \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\right)$ est stable par u.

3. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F_x.

Exercice 11. Montrer que deux matrices semblables ont le même spectre et les sous-espaces propres associés sont de même dimension.

Exercice 12. Soient E un ev et u un automorphisme de E. Déterminer les valeurs propres de u^{-1} en fonction des valeurs propres de u.

Exercice 13. Soient E un ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u.

1. Montrer $\ker u_F = F \bigcap \ker u$ et $\operatorname{Im} u_F \subset F \bigcap \operatorname{Im} u$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
Indication : on pourra considérer l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$.

2. Montrer que, si u est injectif, alors u_F est injectif.

3. Montrer que, pour toute valeur propre λ de u_F, $E_\lambda(u_F) = F \bigcap E_\lambda(u)$.

3 Polynôme caractéristique

Exercice 14. **1.** Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

2. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Que dire de la réciproque ?

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\chi_{A^{-1}}(X) = \dfrac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 16. Soient E un ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F_1, \ldots, F_r$ des sev de E stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
Établir $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_{F_i}}$.

Exercice 17. **1.** Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension impaire et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u a au moins une valeur propre réelle.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair. Montrer que A a au moins une valeur propre réelle.

Exercice 18. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1. Démontrer le résultat lorsque la matrice A est inversible.

2. On se place maintenant dans le cas général. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Établir que $\begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_n - BA & B \\ \mathrm{O} & \lambda \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{O} \\ A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{O} \\ A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{I}_n & B \\ \mathrm{O} & \lambda \mathrm{I}_n - AB \end{pmatrix}$.

3. En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\chi_{(AB)^p} = \chi_{(BA)^p}$. **Indication :** utiliser la question précédente.

Exercice 19. Soient E un ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer $\chi_u = X^{n-1}\big(X - \operatorname{Tr} u\big)$.

Exercice 20. `Polynôme caractéristique d'une projection et symétrie vectorielle.` Soit E un ev de dimension $n \geq 1$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une projection vectorielle. Montrer $\chi_u = (X-1)^r X^{n-r}$ avec $r = \operatorname{rg} u$.
Indication : utiliser $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$ et écrire la matrice de u dans une base convenable.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Montrer $\chi_u = (X-1)^r (X+1)^{n-r}$ avec $r = \dim \ker\big(u - \mathrm{Id}_E\big)$.
Indication : utiliser $E = \ker\big(u - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \ker\big(u + \mathrm{Id}_E\big)$ et écrire la matrice de u dans une base convenable.

Exercice 21. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 22. `Plusieurs concours et plusieurs années.` Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer χ_A.
Indication : utiliser les opérations élémentaires suivantes : $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ et $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour $2 \leq i \leq n$

Exercice 23. `Matrice compagnon.` Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On considère la matrice compagnon $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer $\chi_{C_P} = P$. **Indication :** utiliser l'opération élémentaire $C_1 \longleftarrow C_1 + XC_2 + X^2 C_3 + \ldots + X^{n-1} C_n$.

4 Diagonalisabilité

Exercice 24. **1.** Soient E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda\}$.
Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $u = \lambda . \mathrm{Id}_E$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A = \lambda.\mathrm{I}_n$.

Exercice 25. `D'après CNC MP 2023.` On considère $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1. Justifier que si $\alpha \neq \beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $\alpha = \beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 26. Soit $n \geq 2$. Montrer que la matrice $A = (\delta_{i+1,j})_{1\leq i,j\leq n}$ n'est jamais diagonalisable. **Indication :** regarder $\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 27. `CNC MP 2024.` On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Vérifier que $PQ = 4\mathrm{I}_3$.

b. En déduire que P est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

2. On considère les vecteurs suivants : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que u est un vecteur propre de la matrice A dont on précisera la valeur propre α correspondante.

b. Montrer que v et w sont deux vecteurs propres de la matrice A associés à la même valeur propre β dont on précisera sa valeur.

c. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à préciser telle que $A = PDP^{-1}$.

3. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.

c. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n sous forme d'un tableau.

Exercice 28. Soient E un ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que u est diagonalisable et déterminer une base de diagonalisation de u.

Exercice 29. `Suites récurrentes.`

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Sigma) : \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -x_n + 2y_n - z_n \\ z_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}$

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $(\Sigma) \iff X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer.

2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

3. Justifier que A est diagonalisable puis, déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. Résoudre (Σ). (exprimer x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0 et z_0)

Exercice 30. `Résolution d'une équation matricielle.` Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'équation matricielle $(\mathcal{E})$: $X^2 + 2X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est diagonalisable puis, déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de $(\mathcal{E})$. On pose $M = P^{-1}XP$.

a. Justifier que $M^2 + 2M = D$.

b. Montrer $DM = MD$.

c. En déduire que M est une matrice diagonale.

3. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

Exercice 31. `Diagonalisation de l'endomorphisme de rang 1.`

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang égal à 1. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Tr}(u)$ est non nulle.

2. **Application :** retrouver alors que la matrice élémentaire $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si, et seulement si, $i = j$.

Exercice 32. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $u(M) = aM + bM^\top$.

1. Vérifier que les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont stables par u.

2. Établir que u est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

3. Calculer la trace et le déterminant de u.

Exercice 33. `Racine carrée d'une matrice(d'après CNC MP 2021).` Pour A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite une racine carrée de A si $R^2 = A$. On note $\mathcal{R}_n(A)$ l'ensemble des racines carrées de A, c'est-à-dire,

$$\mathcal{R}_n(A) = \left\{R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ R^2 = A\right\}.$$

On considère A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. On pose $D = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

b. Montrer que R est une racine carrée de A si, et seulement si, la matrice $P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. Soit Δ une racine carrée de la matrice D.

a. Montrer que $\Delta D = D\Delta$.

b. En déduire que Δ est une matrice diagonale.

c. Si on pose $\Delta = \operatorname{diag}\left(\delta_1, \ldots, \delta_n\right)$, déterminer pour tout entier i, $1 \leq i \leq n$, δ_i^2 en fonction de λ_i.

3. Déterminer $\mathcal{R}_n(A)$ dans le cas où A admet au moins une valeur propre strictement négative.

4. On suppose que les valeurs propres de A sont toutes positives ou nulles.

a. Déterminer les racines carrées de la matrice D.

b. En déduire les racines carrées de A en fonction de la matrice P et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

c. Déterminer le nombre des racines carrées de la matrice A.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathcal{R}_3(A)$.

5 Nilpotence, trigonalisabilité

Exercice 34. `Toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure stricte et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Notons $\mathcal{B} = \left(e_1, \ldots, e_n\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

1. Justifier que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_{n-1}\right)$.

2. Montrer $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \ \operatorname{Im}\left(u^k\right) \subset \operatorname{Vect}\left(e_1, \ldots, e_{n-k}\right)$.

3. En déduire que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$, puis que A est nilpotente.

Exercice 35. `Classique.` Soient E un ev de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ non nul tel que la famille $\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.

2. En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 36. Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable et donner une matrice de passage.

Exercice 37. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u. Vérifier que λ^k est valeur propre de u^k.

2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que les valeurs propres de u^k sont exactement les λ^k avec λ valeur propre de u.

3. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donner un exemple où la propriété précédente n'est plus vraie.

Exercice 38. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Calculer χ_A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont les deux premières vecteurs sont des vecteurs propres de A telle que

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$ puis, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$.

4. Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et, en déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 39. `ENSTIM MP.`

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non diagonalisable.
Montrer que l'on peut écrire $A = \alpha \mathrm{I}_2 + N$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2.

2. Application : Résoudre l'équation $X^n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 40. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ `est connexe par arcs.` Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ trinagulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

2. Construire un chemin inscrit dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ d'extrémités I_n et T.

3. Montrer alors que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 41. `CCINP MP.` Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer χ_A et déterminer une matrice de passage rendant la matrice A semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 42. `CCINP PSI.`

1. Déterminer l'ensemble Ω des réels a tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

2. Pour $a \in \Omega$, trouver P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

6 Réduction et polynômes annulateurs

Exercice 43. **1.** Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E stable par u.
Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$ et $P(u)_F = P(u_F)$.

2. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(u, v) \in \left(\mathcal{L}(E)\right)^2$ commutent : $uv = vu$.
Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \left(\mathbb{K}[X]\right)^2$, $\ker\big(P(u)\big)$ et $\mathrm{Im}\,\big(P(u)\big)$ sont stables par $Q(v)$.

Exercice 44. `Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs.` Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables : $A = PBP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A) = PQ(B)P^{-1}$. En déduire que, A et B ont les mêmes polynômes annulateurs.

Exercice 45. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = \mathrm{I}_3$. Calculer $\mathrm{Tr}\,(A)$ et $\det(A)$.

Exercice 46. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u tel que $P(0) \neq 0$, alors u est inversible et $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 47. `Calcul des puissances d'une matrice carrée.`

1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u de degré $N \geq 1$.
Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \mathrm{Vect}\left(u^i,\ 0 \leq i \leq N-1\right)$. **Indication :** utiliser la disivion euclidienne de X^k par P.

2. Application : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. **Indication :** on pourra commençer par calculer χ_A.

Exercice 48. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sev de E stable par u. Montrer $\prod_{u_F}$ divise $\prod_u$.

Exercice 49. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 50. `Polynôme minimal et caractéristique d'une matrice nitpotente.` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que, $\chi_A = X^n$ si, et seulement si, A est nilpotente.

2. Montrer que, $\prod_A = X^p$ si, et seulement si, A est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 51. Montrer que, deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Exercice 52. `Matrices de rang 1.` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\text{rg}\,(A) = 1 \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $A = UV^\top$.

2. En déduire un polynôme annulateur d'une matrice de rang 1.

3. Supposons $\text{rg}\,(A) = 1$.

a. Montrer que $\prod_A = X^2 - \text{Tr}\,(A)X$.

b. Montrer que $\text{I}_n + A$ est inversible si, et seulement si, $\text{Tr}\,(A) \neq -1$. Calculer alors $(\text{I}_n + A)^{-1}$ en fonction de I_n et A.

Exercice 53. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = \text{I}_n$ et la famille $(\text{I}_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ soit libre. Déterminer $\prod_A$ puis calculer $\text{Tr}\,(A)$.

Exercice 54. Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 = \text{Id}_E$. Justifier que $\ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u^2 + u + \text{Id}_E) = E$.

Exercice 55. `CCINP MP.` Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^4 + u = 0$. Montrer $\ker(u) \oplus \text{Im}\,(u) = E$.

Exercice 56. Montrer que l'endomorphisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ est diagonalisable.

Exercice 57. `Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable.` Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

2. Montrer que $\chi_A = (X-1)^2(X+1)^2$.

3. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{\chi_A}$.

4. On pose $p_1 = \frac{1}{4}(u - \text{Id})^2(u + 2\text{Id})$ et $p_2 = -\frac{1}{4}(u + \text{Id})^2(u - 2\text{Id})$.

a. Montrer que p_1 est la projection sur $E_{-1}(u)$ parallèlement à $E_1(u)$ et p_2 est la projection sur $E_1(u)$ parallèlement à $E_{-1}(u)$.

b. Écrire u en fonction de p_1 et p_2.

c. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k = (-1)^k p_1 + p_2$.

d. Justifier que u est inversible puis exprimer u^{-1} en fonction de p_1 et p_2.

Exercice 58. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $u(M) = aM + \text{Tr}\,(M)\text{I}_n$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, trouver ses éléments propres et son polynôme minimal.

2. Pour quels a, u est-il un automorphisme ? Trouver son inverse dans ces cas.

Exercice 59. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ \text{O}_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ \text{O}_n & P(A) \end{pmatrix}$.

2. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable et B est nulle.