TD N°4

Séries dans un evn de dimension finie, familles sommables (correction)

1 Séries dans un evn de dimension finie

Corrigé de l'exercice 1. La série $\sum\limits_{n\geq 1} A_n$ est convergente si, et seulement si, les séries $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$, $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$, $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{3^n}$ le sont. On a :

- $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ est convergente car c'est une série exponentielle et on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-1=\mathrm{e}-1$.
- $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente car c'est une série alternée vérifie le critère de Leibniz et on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$.
- $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ est convergente car géométrique et on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2}=1$.
- $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{3^n}$ est convergente par la règle de d'Alembert $\frac{n+1}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$ et on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} A_n$ est convergente et on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n=\begin{pmatrix}\mathrm{e}-1 & -\ln 2\\ 1 & 3/4\end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 2. **1.** Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$. On a :

$$\begin{aligned}\exp\big(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\big)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\big(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\big)^k\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k\right)\\&=\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!},\dots,\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\right)\\&=\operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1},\dots,\mathrm{e}^{\lambda_n}\right).\end{aligned}$$

2. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a :

$$\exp(\lambda \mathrm{I}_n)=\exp\big(\operatorname{diag}(\lambda,\dots,\lambda)\big)=\operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda},\dots,\mathrm{e}^{\lambda}\right)=\mathrm{e}^{\lambda}\,\mathrm{I}_n.$$

3. Soient $(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^{*r}$ et $A_i\in\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned}\exp\big(\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_r)\big)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\big(\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_r)\big)^k\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\operatorname{diag}\left(A_1^k,\dots,A_r^k\right)\\&=\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A_1^k,\dots,\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A_r^k\right)\\&=\operatorname{diag}\left(\exp A_1,\dots,\exp A_r\right).\end{aligned}$$

4. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned}
\exp\left(PAP^{-1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(PAP^{-1}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} PA^kP^{-1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} PA^kP^{-1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} PA^k\right)P^{-1} \\
&= P\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} PA^k\right)P^{-1} \quad \text{car l'application } M \longmapsto PMP^{-1} \text{ est continue puisque elle est linéaire en dimension finie} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)P^{-1} \\
&= P\exp(A)P^{-1}
\end{aligned}$$

5. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On a :

$$\begin{aligned}
\exp\left(A+B\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(A+B\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A^j \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j}
\end{aligned}$$

série produit de Cauchy puisque la série exponentielle $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge absolument.

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k\right) \\
&= \exp(A)\exp(B).
\end{aligned}$$

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et $-A$ commutent, donc d'après la question précédente,

$$\mathrm{I}_n = \exp(\mathrm{O}_n) = \exp\left(A - A\right) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A)$$

c-à-d $\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(\exp(A)\right)^{-1} = \exp(-A)$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On a

$$\exp(A) = \exp\left(PDP^{-1}\right) = P\exp(D)P^{-1} \text{ avec } \exp(D) \text{ matrice diagonale}$$

donc $\exp(A)$ est diagonalisable.

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\exp(A)\right)^\top &= \left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right)^\top \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k\right)^\top \quad \text{car l'application } M \longmapsto M^\top \text{ est continue puisque elle est linéaire en dimension finie} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(A^k\right)^\top \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(A^\top\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(A^\top\right)^k \\
&= \exp\left(A^\top\right).
\end{aligned}$$

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. On sait que $A^n = \mathrm{O}_n$ donc

$$\exp(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A^k+\underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k}_{=\mathrm{O}_n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A^k.$$

De plus, $\exp(A)-\mathrm{I}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A^k-\mathrm{I}_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}A^k=A\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}A^{k-1}\right)$. Les matrices A et $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}A^{k-1}$ commutent, donc

$$\left(\exp(A)-\mathrm{I}_n\right)^n=\underbrace{A^n}_{=\mathrm{O}_n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}A^{k-1}\right)^n=\mathrm{O}_n.$$

Ainsi, $\exp(A)-\mathrm{I}_n$ est nilpotente.

10. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le cours, $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension finie ($\dim\mathbb{K}[A]=\deg\prod_A$). Donc $\mathbb{K}[A]$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Aussi, la suite $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^k\right)_{N\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}[A]$ qui converge vers $\exp(A)$. Ainsi, $\exp(A)\in\mathbb{K}[A]$.

11. Soit $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\exp(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}\lambda_1^k & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_1^k & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_n^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

12. $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}\,A=\{\lambda\}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$. On a $\chi_A=(X-\lambda)^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\chi_A(A)=(A-\lambda\mathrm{I}_n)^n=\mathrm{O}_n.$$

La matrice $A-\lambda\mathrm{I}_n$ est donc nilpotente. Ainsi,

$$\begin{aligned}\exp(A)&=\exp\left(A-\lambda\mathrm{I}_n+\lambda\mathrm{I}_n\right)\\&=\exp(\lambda\mathrm{I}_n)\exp\left(A-\lambda\mathrm{I}_n\right)\quad\text{car } A-\lambda\mathrm{I}_n \text{ et } A \text{ commutent}\\&=\mathrm{e}^{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(A-\lambda\mathrm{I}_n\right)^k.\end{aligned}$$

13. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, il existe $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A=PTP^{-1}$. On a $\exp(A)=\exp(T)$. Si $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$, avec $\mathrm{Sp}\,(A)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, alors $\exp(T)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & \star & \star\\ & \ddots & \star\\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n}\end{pmatrix}$. Par suite,

$$\mathrm{Sp}\left(\exp(A)\right)=\mathrm{Sp}\left(\exp(T)\right)=\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n}\right\}=\left\{\mathrm{e}^{\lambda},\ \ \lambda\in\mathrm{Sp}\,(A)\right\}.$$

14. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, il existe $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A=PTP^{-1}$. On a

$$\det\left(\exp(A)\right)=\det\left(\exp(T)\right)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(A)}\mathrm{e}^{\lambda}=\exp\left(\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(A)}\lambda\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(A)}.$$

Corrigé de l'exercice 3. **1.** On a $A^2=\mathrm{O}_2$ donc $\exp(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n=\mathrm{I}_2+A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

2. $\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$ donc $\exp A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n!} & -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n!}\\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n!} & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n!}\end{pmatrix}$.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n!}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{\cos\theta}\left(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)\right)$. D'où :

$$\exp A=\mathrm{e}^{\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos(\sin\theta) & -\sin(\sin\theta)\\ \sin(\sin\theta) & \cos(\sin\theta)\end{pmatrix}.$$

3. $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-2)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e} & (\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e})/2 & (3\,\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}-2\,\mathrm{e}^2)/6 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & (\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-1})/3 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. On commence par calculer χ_A. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & -2 & X+2 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} X+1 & -2 & 1 \\ X+1 & X-1 & 1 \\ X+1 & -2 & X+2 \end{vmatrix} \\
&= (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3-L_1}}{=} (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)^3
\end{aligned}$$

et $\mathrm{Sp}\,(A) = \{-1\}$. Ainsi, $\exp(A) = \mathrm{e}^{-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{3-1} \frac{1}{k!}(A+\mathrm{I}_3)^k = \mathrm{e}^{-1}\left(\mathrm{I}_3 + (A+\mathrm{I}_3) + \underbrace{(A+\mathrm{I}_3)^2}_{=\mathrm{O}_3}/2\right) = \mathrm{e}^{-1}(A+2\mathrm{I}_3) = \mathrm{e}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. *Première méthode :* On écrit $A = \mathrm{I}_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \mathrm{O}_3$. Les matrice I_3 et N commutent, par la formule de binôme de Newton,

$$A^k = (\mathrm{I}_3+N)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}N^j = \sum_{j=0}^{2}\binom{k}{j}N^j = \mathrm{I}_3 + \binom{k}{1}N + \binom{k}{2}N^2 = \mathrm{I}_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k-k(k-1)/2 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k-k(k-1)/2}{k!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} & -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!} \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} \end{pmatrix}$. Or

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k-k(k-1)/2}{k!}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!}=2\,\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!}=2\,\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-2)!}=2\,\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=2\,\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}=\frac{3\,\mathrm{e}}{2}$.

D'où : $\exp(A)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}&\mathrm{e}&\frac{3\,\mathrm{e}}{2}\\0&\mathrm{e}&-\mathrm{e}\\0&0&\mathrm{e}\end{pmatrix}$.

Deuxième méthode : On a $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$ donc

$$\exp(A)=\mathrm{e}^1\sum_{k=0}^{3-1}\frac{1}{k!}(A-\mathrm{I}_3)^k=\mathrm{e}\left(\mathrm{I}_3+(A-\mathrm{I}_3)+(A-\mathrm{I}_3)^2\right)=\mathrm{e}\left(A+(A-\mathrm{I}_3)^2/2\right)=\mathrm{e}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}&\mathrm{e}&\frac{3\,\mathrm{e}}{2}\\0&\mathrm{e}&-\mathrm{e}\\0&0&\mathrm{e}\end{pmatrix}.$$

6. La matrice A est diagonale par blocs : $A=\begin{pmatrix}-1&0\quad 0\\0&\\0&Q\end{pmatrix}$ avec $Q=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$ donc

$$\exp(A)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1}&0\quad 0\\0&\\0&\exp(Q)\end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer $\exp(Q)$. Pour cela, on a $\chi_Q=(X-2)^2$ donc $\mathrm{Sp}(Q)=\{2\}$. Par suite,

$$\exp(Q)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}Q^k=\mathrm{e}^2\sum_{k=0}^{2-1}\frac{1}{k!}(Q-2\mathrm{I}_2)^k=\mathrm{e}^2(Q-\mathrm{I}_2)=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^2&-\mathrm{e}^2\\\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^2\end{pmatrix}.$$

D'où $\exp(A)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1}&0&0\\0&-\mathrm{e}^2&-\mathrm{e}^2\\0&\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^2\end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4. On écrit $A=PDP^{-1}$ avec $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $P\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$.

On considère la norme d'algèbre $\|.\|_1$ définie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ par $\|A\|_1\overset{\text{déf}}{=}\sup\limits_{1\le j\le p}\sum\limits_{i=1}^{p}|a_{i,j}|$. Soit $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\|A^n\|_1=\|PD^nP^{-1}\|_1\le\|P\|_1\|D^n\|_1\|P^{-1}\|_1.$$

Mais $\|D^n\|_1=\max\limits_{1\le j\le p}|\lambda_j|^n=|\lambda_{j_0}|^n$ pour un $j_0\in[\![1,p]\!]$. Donc

$$\|A^n\|_1\le\|P\|_1\|P^{-1}\|_1|\lambda_{j_0}|^n.$$

Comme la série $\sum\limits_{n\ge0}|\lambda_{j_0}|^n$ converge (série géométrique) alors, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\ge0}\|A^n\|_1$ converge c-à-d la série $\sum\limits_{n\ge0}A^n$ converge absolument.

Par ailleurs, pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}A^n=\sum_{n=0}^{N}PD^nP^{-1}=P\left(\sum_{n=0}^{N}D^n\right)P^{-1}=P\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{N}\lambda_1^n,\dots,\sum_{n=0}^{N}\lambda_p^n\right)P^{-1}$.

Or la série $\sum\limits_{n\ge0}\lambda_i^n$ converge pour tout $1\le i\le p$ (série géométrique) donc la série $\sum\limits_{n\ge0}D^n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}D^n=\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_1^n,\dots,\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_p^n\right)=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{1-\lambda_1},\dots,\frac{1}{1-\lambda_p}\right)=(\mathrm{I}_p-D)^{-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}A^n&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}A^n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}PD^nP^{-1}\\&=\lim_{N\to+\infty}P\left(\sum_{n=0}^{N}D^n\right)P^{-1}\\&=P\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}D^n\right)P^{-1}\quad\text{car l'application } M\longmapsto PMP^{-1}\text{ est continue puisque elle est linéaire en dimension finie}\\&=P\left(\sum_{n=0}^{+\infty}D^n\right)P^{-1}\\&=P(\mathrm{I}_p-D)^{-1}P^{-1}=(P\mathrm{I}_pP^{-1}-PDP^{-1})^{-1}=(\mathrm{I}_p-A)^{-1}.\end{aligned}$$

2 Familles sommables

Corrigé de l'exercice 5. **1.** La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}$$

donc $\dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc par sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1).$$

Ainsi, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2. La suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$. En effet :

- Si $(i,j) \in I_m \bigcap I_n$ pour $m \neq n$ alors $i+j = m = n$ ce qui est absurde donc $I_m \bigcap I_n = \varnothing$ pour tout $m \neq n$.
- Si $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ alors $(i,j) \in I_{i+j}$ donc $\mathbb{N}^2 \subset \displaystyle\bigcup_{n\geq 2} I_n$ et la deuxième inclusion $\displaystyle\bigcup_{n\geq 2} I_n \subset \mathbb{N}^2$ est triviale. Ainsi, $\mathbb{N}^2 = \displaystyle\bigcup_{n\geq 2} I_n$.

D'où, la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$.

3. Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{pq(p+q)} &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{n-p}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}\right) = \frac{2H_{n-1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

4. Chaque sous-famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_n}$ est sommable car chaque I_n est fini et on a $\displaystyle\sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n-1)}{n^2}$. De plus, $\dfrac{2\ln(n-1)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2\ln(n-1)}{n^2}$ converge et la famille $\left(\displaystyle\sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q}\right)_{n\geq 2}$ est sommable. D'où par le théorème de sommation par paquets positif, la famille $(u_{p,q})_{p,q\geq 1}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}} u_{p,q} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\ln(n-1)}{n^2}.$$

Corrigé de l'exercice 6. **1.** On a $\mathbb{Z}^{*-}$ et $\mathbb{N}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$. Par le théorème de sommation par paquets positif, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^{*-}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables si, et seulement si, les familles $(u_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables si, et seulement si, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ sont convergentes. De plus :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2. On a $\mathbb{Z}^{*-}$ et $\mathbb{N}$ forment une partition de $\mathbb{Z}$. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}^{*-}}$ et $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables si, et seulement si, les familles $(|u_{-n}|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables si, et seulement si, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |u_{-n}|$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |u_n|$ sont convergentes si, et seulement si, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ sont absolument convergentes. De plus :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

3. soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\left(\left|r^{|n|}\,\mathrm{e}^{in\theta}\right|\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(r^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. La famille $\left(r^{|n|}\,\mathrm{e}^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc sommable si, et seulement si, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} r^{|-n|}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} r^{|n|}$ sont convergentes si, et seulement si, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} r^{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} r^{n}$ sont convergentes. Or ces dernières séries étant convergentes puisque $r \in [0,1[$ (séries géométriques). De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\,\mathrm{e}^{in\theta} &= \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}\,\mathrm{e}^{-in\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} r^{n}\,\mathrm{e}^{in\theta}\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}\left(\mathrm{e}^{in\theta} + \mathrm{e}^{-in\theta}\right)\\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}\cos(n\theta)\\
&= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n}\,\mathrm{e}^{in\theta}\right)\\
&= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}{1 - r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\right)\\
&= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{r\,\mathrm{e}^{i\theta}\left(1 - r\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}{\left(1 - r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(1 - r\,\mathrm{e}^{-i\theta}\right)}\right)\\
&= \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7. La série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et par le théorème de sommation par paquets positif, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

Par suite, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Corrigé de l'exercice 8. On a $(a_{n,p})_{(n,p)\in I} = \left(\frac{1}{(n+1)^2 - n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}$ diverge donc la famille $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable et par suite, la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in I}$ n'est pas sommable.

Corrigé de l'exercice 9. **1.** La suite $\left(I_k\right)_{k\geq 2}$ définie par $I_k = \left\{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2},\ \ m+n = k\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$. De plus,

$$\mathrm{Card}\, I_k = \mathrm{Card}\left\{(m,k-m),\ \ 1\leq m\leq k-1\right\} = k-1.$$

- Pour tout $k\geq 2$, la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in I_k}$ est sommable car chaque I_k est fini et
$$\sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}\underbrace{\sum_{(m,n)\in I_k} 1}_{\mathrm{Card}\, I_k} = \frac{\mathrm{Card}\, I_k}{k^\alpha} = \frac{k-1}{k^\alpha}.$$
- On a $\frac{k-1}{k^\alpha}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{k}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$, donc la série $\sum\limits_{k\geq 2}\frac{k-1}{k^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$ (série de Riemann). Par suite, la famille $\left(\sum\limits_{(m,n)\in I_k}\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{k\geq 2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Par le théorème de sommation par paquets positif, la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

2. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{m^2+n^2}\leq\frac{2}{(m+n)^2},$$

donc la famille $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si, et seulement si, la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable si, et seulement si, $2\alpha > 2$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Corrigé de l'exercice 10. **1.** La série $\sum\limits_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}$ converge (série de Riemann) donc la famille $\left(\frac{1}{p^2}\frac{1}{q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(p,q)\in I}\frac{1}{p^2q^2}=\left(\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{q^2}\right)=\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\right)^2=\frac{\pi^4}{36}.$$

2. Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{p^2+q^2}\geq\dfrac{1}{(p+q)^2}$. Or la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in I}$ n'est pas sommable. Par suite, la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in I}$ n'est pas sommable.

Corrigé de l'exercice 11. Soit $x\in\,]-1,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^n}{1-x^n}=\sum_{m=1}^{+\infty}(x^n)^m=\sum_{m=1}^{+\infty}x^{mn}$ (série géométrique). Considérons alors la suite double $\left(x^{mn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum_{m\geq1}|x^{mn}|$ converge (série géométrique) et on a $\sum_{m=1}^{+\infty}|x^{mn}|=\dfrac{|x^n|}{1-|x^n|}$.
- $\dfrac{|x^n|}{1-|x^n|}\underset{n\to+\infty}{\sim}|x^n|$ et la série $\sum_{n\geq1}|x^n|$ converge (série géométrique) donc la série $\sum_{n\geq1}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}|x^{mn}|\right)$ converge.

Par le théorème de Fubini, la famille $\left(x^{mn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et on a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}x^{mn}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}x^{mn}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}.$$

La suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}^{*2}$ définie par $I_n=\left\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^{*2},\ \ k\ell=n\right\}$ est une partition de $\mathbb{N}^{*2}$. En effet :

- Si $(k,\ell)\in I_n\bigcap I_m$ avec $m\neq n$ alors $k\ell=n=m$ ce qui est absurde donc $I_n\bigcap I_m=\varnothing$ pour tout $m\neq n$.
- Si $(k,\ell)\in\mathbb{N}^{*2}$ alors $(k,\ell)\in I_{k\ell}$ donc $\mathbb{N}^{*2}\subset\bigcup_{n\geq1}I_n$ et la deuxième inclusion $\bigcup_{n\geq1}I_n\subset\mathbb{N}^{*2}$ est triviale. Ainsi, $\mathbb{N}^{*2}=\bigcup_{n\geq1}I_n$.

De plus, $\operatorname{Card}I_n=\operatorname{Card}\left\{(k,n/k),\ \ k\text{ diviseur positif de }n\right\}=\mathrm{d}(n)$. Par le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}x^{mn}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,\ell)\in I_n}x^{k\ell}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,\ell)\in I_n}x^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\underbrace{\sum_{(k,\ell)\in I_n}1}_{=\operatorname{Card}I_n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{d}(n)x^n.$$

Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{d}(n)x^n$ où $\mathrm{d}(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Corrigé de l'exercice 12. 1. Soit F une partie finie de $\mathbb{Z}$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $F\subset[\![-N,N]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in F}n^2|a_n| &= \sum_{\substack{n\in F\\ n\neq0}}n^2|a_n|\\
&= \sum_{\substack{n\in F\\ n\neq0}}n^3|a_n|\frac{1}{n}\\
&\leq \left(\sum_{\substack{n\in F\\ n\neq0}}n^6a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{n\in F\\ n\neq0}}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \qquad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}\\
&\leq \left(\sum_{n\in F}n^6a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{n\in[\![-N,N]\!]\\ n\neq0}}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^6a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=-N}^{-1}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\\
&\leq \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^6a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\\
&\leq \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^6a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble $\left\{\sum_{n\in F}n^2|a_n|\ \text{ tel que } F \text{ finie }\subset\mathbb{Z}\right\}$ est majoré et par suite, la famille $\left(n^2a_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| \le \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}.$$

2. La famille $\left(n^2 a_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable donc les séries $\sum\limits_{n\ge1} n^2|a_n|$ et $\sum\limits_{n\ge1} n^2|a_{-n}|$ convergent. Nécessairement, $n^2|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n^2|a_{-n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c-à-d $|a_n| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $|a_{-n}| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison, les séries $\sum\limits_{n\ge1}|a_n|$ et $\sum\limits_{n\ge1}|a_{-n}|$ convergent. Ainsi, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
Par ailleurs, on a pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $|na_n| \le n^2|a_n|$ donc par comparaison, la famille $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

Corrigé de l'exercice 13. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. On a :

$$\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = z^{2^n}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(z^{2^{n+1}}\right)^m = z^{2^n}\sum_{m=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}m} = \sum_{m=0}^{+\infty} z^{2^n(2m+1)}.$$

Considérons la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $a_{m,n} = z^{2^n(2m+1)}$.

- $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{m\ge0}|a_{m,n}|$ converge d'après le critère de d'Alembert :

$$\left|\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}\right| = \frac{|z|^{2^n(2m+3)}}{|z|^{2^n(2m+1)}} = |z|^{2^{n+1}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} |z|^{2^{n+1}} < 1.$$

  De plus, $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}|a_{m,n}| = \frac{|z|^{2^n}}{1-|z|^{2^{n+1}}}$.
- La série $\displaystyle\sum_{n\ge0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}|a_{m,n}|\right)$ converge. En effet : $\dfrac{|z|^{2^n}}{1-|z|^{2^{n+1}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^{2^n}$ et la série $\sum\limits_{n\ge0}|z|^{2^n}$ puisque $\dfrac{|z|^{2^{n+1}}}{|z|^{2^n}} = |z|^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$.

Par le théorème de Fubini, la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}.$$

Par ailleurs, puisque l'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n,m) = 2^n(2m+1)$ est bijective, la suite $\left(I_k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_k = \left\{(m,n)\in\mathbb{N}^2,\ \ 2^n(2m+1) = k\right\}$ forme une partition de $\mathbb{N}^2$ et on a $\operatorname{Card} I_k = 1$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Ainsi, par le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} a_{m,n}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} z^{2^n(2m+1)}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{(m,n)\in I_k} z^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \underbrace{\left(\sum_{(m,n)\in I_k} 1\right)}_{=\operatorname{Card} I_k} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k = \frac{z}{1-z}.$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$.

Corrigé de l'exercice 14. **1.** La famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable donc par le théorème de Fubini,

$$\sum_{(n,p)\in I} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right).$$

Par ailleurs, la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \left\{(k,p)\in I,\ \ kp = n\right\}$ forme une partition de I et puisque la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable alors par le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(n,p)\in I} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right).$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right)$.

2. Soit $x\in\,]-1,1[$.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{p\ge1}|a_n x^{np}|$ converge (série géométrique) et on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}|a_n x^{np}| = |a_n|\sum_{p=1}^{+\infty}\left(|x^n|\right)^p = \frac{|a_n|\,|x^n|}{1-|x^n|}.$$

- La série $\sum\limits_{n\geq1}\left(\sum\limits_{p=1}^{+\infty}|a_nx^{np}|\right)$ converge. En effet : $\dfrac{|a_n|\,|x^n|}{1-|x^n|}\underset{n\to+\infty}{\sim}|a_n|\,|x^n|$ et $|a_n|\,|x^n|\leq|a_n|$. Puisque la série $\sum\limits_{n\geq1}a_n$ converge absolument, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geq1}|a_n|\,|x^n|$ converge et par suite, la série $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{|a_n|\,|x^n|}{1-|x^n|}$ converge.

Par le théorème de Fubini, la famille $\left(a_nx^{np}\right)_{(n,p)\in I}$ est sommable.

3. Soit $x\in\,]-1,1[$. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\frac{x^n}{1-x^n}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}a_nx^{np}\right)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n}^{+\infty}a_kx^{kp}\right)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{d|n}^{+\infty}a_dx^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\underbrace{\left(\sum_{d|n}^{+\infty}a_d\right)}_{=b_n}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}b_nx^n.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15. La suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n=\left\{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \ p+q=n\right\}$ forme une partition de $\mathbb{N}^2$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in I_n}$ est sommable car chaque I_n est fini et

$$\sum_{(p,q)\in I_n}\frac{1}{p!q!(p+q+1)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!(n-p)!(n+1)}=\frac{1}{n!(n+1)}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\frac{2^n}{(n+1)!}.$$

- La série $\sum\limits_{n\geq0}\left(\sum\limits_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}\right)$ converge (série exponentielle).

Par le théorème de sommation par paquets positif, la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et on a

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}u_{p,q}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in I_n}u_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1).$$

Corrigé de l'exercice 16. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $w_n=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{4^k}{k!}\leq\dfrac{1}{2^n}\mathrm{e}^4$ donc $w_n=O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et, par comparaison à une série géométrique, la série $\sum\limits_{n\geq0}w_n$ converge. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

donc la série $\sum\limits_{n\geq0}w_n$ est produit de Cauchy des séries absolument convergentes $\sum\limits_{n\geq0}\dfrac{2^n}{n!}$ et $\sum\limits_{n\geq0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}w_n==\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\mathrm{e}^2\,\frac{1}{1-1/2}=2\,\mathrm{e}^2.$$

Corrigé de l'exercice 17. **1.** *Premirère méthode :* soit $x\in\,]-1,1[$. La série $\sum\limits_{n\geq0}x^n$ converge absolument donc par produit de Cauchy,

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^kx^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\left(\sum_{k=0}^{n}1\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Deuxième méthode : soit $x\in\,]-1,1[$. Considérons la famille d'indices séparés $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{i,j}=x^ix^j=x^{i+j}$. La série $\sum\limits_{i\geq0}x^i$ converge absolument donc la famille $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et par suite, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. Par le théorème de Fubini :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x^{i+j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} x^j\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x^j\right) = \frac{1}{1-x}\sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Par ailleurs, la suite $\left(I_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $I_k = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad i+j=k\right\}$ forme une partition de $\mathbb{N}^2$. De plus, Card $I_k = k+1$. Par le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in I_k} x^{i+j}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{(i,j)\in I_k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \underbrace{\left(\sum_{(i,j)\in I_k} 1\right)}_{=\text{Card } I_k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

2. Récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $k=0$ l'identité est vérifiée (somme d'une série géométrique).

Hérédité : Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons la propriété est vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$. La série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ converge absolument donc par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^{k+2}} &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}}\frac{1}{(1-x)} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}\binom{p+k}{p}x^p x^{n-p} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\sum_{p=0}^{n}\binom{p+k}{p} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\sum_{p=0}^{n}\binom{p+k}{k} \quad \text{symétrie des coefficients binomiaux} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\sum_{p=0}^{n}\left(\binom{p+k+1}{k+1}-\binom{p+k}{k+1}\right) \quad \text{formule du triangle de Pascal} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n\left(\binom{n+k+1}{k+1}-\underbrace{\binom{k}{k+1}}_{=0}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k+1}{n}x^n.
\end{aligned}$$

Donc l'identité est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}x^n$.

Corrigé de l'exercice 18. Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|<1$. On a :

$$\forall p\geq 1,\quad \frac{a^p}{1-a^{2p}} = a^p\sum_{q=0}^{+\infty}a^{2pq} = a^p\sum_{q=1}^{+\infty}a^{2p(q-1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}a^{p(2q-1)}.$$

Considérons la famille $(u_{p,q})_{p,q\geq 1}$ définie par $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$.

- $\forall p\geq 1$, la série $\displaystyle\sum_{q\geq 1}|u_{p,q}|$ converge (série géométrique) et

$$\sum_{q=1}^{+\infty}|u_{p,q}| = \sum_{q=1}^{+\infty}|a|^{p(2q-1)} = \frac{|a|^p}{1-|a|^{2p}}.$$

- La série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge. En effet : $\dfrac{|a|^p}{1-|a|^{2p}} \underset{p\to+\infty}{\sim} |a|^p$ et la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}|a|^p$ converge (série géométrique), donc par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ converge.

Par le théorème de Fubini, la famille $(u_{p,q})_{p,q\geq 1}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Or $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}}$ et $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} a^{p(2q-1)}\right) = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{a^{2q-1}}{1-a^{2q-1}}$. Ainsi,

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}.$$

Corrigé de l'exercice 19. **1.** Soit $x>1$. La famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in I}$ est une famille de réels positifs d'indices séparés. Comme la série $\displaystyle\sum_{a\geq 1}\frac{1}{a^x}$ converge (série de Riemann), alors la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in I}$ est sommable et on a

$$\sum_{(a,b)\in I}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{(a,b)\in I}\frac{1}{a^x}\frac{1}{b^x} = \left(\sum_{a=1}^{+\infty}\frac{1}{a^x}\right)^2 = \left(\zeta(x)\right)^2.$$

2. La suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \left\{(a,b)\in I,\ \ ab=n\right\}$ forme une partition de I. Aussi, la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in I}$ est sommable donc par le théorème de sommation par paquets positif,

$$\sum_{(a,b)\in I}\frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in I_n}\frac{1}{(ab)^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in I_n}\frac{1}{n^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\underbrace{\left(\sum_{(a,b)\in I_n} 1\right)}_{\text{Card } I_n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}.$$

Finalement, $\displaystyle\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}$.

Corrigé de l'exercice 20. **1.** Soit $x\in\,]-1,1[$.

a. On a $\displaystyle n^2\frac{nx^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c-à-d $\displaystyle\frac{nx^n}{1-x^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{nx^n}{1-x^n}$ converge absolument donc converge. De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\sum_{k=0}^{+\infty}x^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(k+1)}.$$

b. On a $\displaystyle\left|\frac{x^p}{(1-x^p)^2}\right| \underset{p\to+\infty}{\sim} |x|^p$ et la série $\displaystyle\sum_{p\geq1}|x|^p$ converge (série géométrique) donc, par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{p\geq1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge absolument donc converge.

Posons, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $\ a_{n,k} = nx^{n(k+1)}$.

- $\forall n\in\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq0}|a_{n,k}|$ converge (série géométrique) et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}| = n|x|^n\sum_{k=0}^{+\infty}\left(|x^n|\right)^k = \frac{n|x|^n}{1-|x|^n}.$$

- La série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}|\right)$ converge.

Par le théorème de Fubini, la famille $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n,k}.$$

Or $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n(k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{(n+1)(k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(x^{k+1}\right)^n\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{\left(1-x^{k+1}\right)^2} \quad \text{produit de Cauchy de la série } \sum_{n\geq 1}\left(x^{k+1}\right)^n \text{ avec elle même.}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\left(1-x^k\right)^2}\end{aligned}$$

D'où : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{(1-x^p)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

2. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. On a $\frac{1}{k^3(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4}$ et la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^4}$ converge (série de Riemann) donc, par comparaison, la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3(k+1)}$ et par suite, le nombre $u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$ est bien défini, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b. Posons, pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $u_{n,k} = \begin{cases} \frac{n}{k^3(k+1)} & \text{si} \quad k\geq n\\ 0 & \text{si} \quad k<n\end{cases}$. La famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est une famille de réels positifs.

- $\forall k\in\mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geq 1} u_{n,k}$ converge car pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ fixé, la suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang. De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{k^3(k+1)} = \frac{1}{k^3(k+1)} \underbrace{\sum_{n=1}^{k} n}_{=k(k+1)/2} = \frac{1}{2k^2}.$$

- La série $\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k}\right)$ converge (série de Riemann).

Par le théorème de Fubini, la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k}.$$

Or $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2} = \frac{\pi^2}{12}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{n}{k^3(k+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{12}$.

3. *Un premier contre-exemple.*

a. Soit $i\in\mathbb{N}$ fixé. La série $\sum_{j\geq 0} b_{i,j}$ converge car la suite $(b_{i,j})_{j\geq i+1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{i-1} b_{i,j} + b_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} b_{i,j} = 0 + (-1) + \sum_{j=i+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = -1+1 = 0.$$

La série $\sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ converge car c'est la série nulle. D'où le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et est nul.

b. Soit $j\in\mathbb{N}$ fixé. La série $\sum_{i\geq 0} b_{i,j}$ converge car la suite $(b_{i,j})_{i\geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang et on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} b_{i,j} + b_{j,j} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{2^{j-i}} + (-1) + 0 = \frac{1}{2^j}\frac{1-2^j}{1-2} - 1 = -\frac{1}{2^j}.$$

La série $\sum_{j\geq 0}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ converge (série géométrique) et on a : $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^j} = -2$.

D'où le nombre $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et vaut -2.

c. D'après ce qui précède, les nombres $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existent mais ne sont pas égaux.

4. *Un second contre-exemple.*

a. Soit $i \in \mathbb{N}$ fixé. La série $\sum_{j\geq 0} c_{i,j}$ converge car géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{j=0}^{i-1} c_{i,j} + c_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} c_{i,j} = 0 + i - 2i\sum_{j=i+1}^{+\infty} 3^{i-j} = i - 2i\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = i - 2i\frac{1}{3}\frac{1}{1-1/3} = 0.$$

La série $\sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ converge car c'est la série nulle. D'où le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existe et est nul.

b. Soit $j \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ converge car pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $(c_{i,j})_{i\geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang. De plus,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} c_{i,j} + c_{j,j} + \sum_{i=j+1}^{+\infty} c_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} -2i3^{i-j} + j + 0 = j - \frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i.$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{2}{3^j}\sum_{i=0}^{j-1} i3^i = \frac{2}{3^{j-1}}\sum_{i=0}^{j-1} i3^{i-1} = \frac{2}{3^{j-1}}\left(\sum_{i=0}^{j-1} x^i\right)'\Bigg|_{x=3} &= \frac{2}{3^{j-1}}\left(\frac{jx^{j-1}(x-1)-(x^j-1)}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_{x=3}\\ &= \frac{2}{3^{j-1}}\frac{2j3^{j-1}-(3^j-1)}{4}\\ &= j - \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - j + \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

c. La série $\sum_{j\geq 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$ diverge grossièrement puisque le terme général $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \frac{3}{2}$.