TD N°4

Séries dans un evn de dimension finie, familles sommables

1 Séries dans un evn de dimension finie

Exercice 1. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1/n! & (-1)^n/n \\ 1/2^n & n/3^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} A_n$ est convergente, puis calculer sa somme.

Exercice 2. `Autour de l'exponentielle d'une matrice carrée.`

1. Montrer que : $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \ \exp\big(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\big) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}\right)$.
2. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \exp(\lambda I_n) = e^{\lambda}\, I_n$.
3. Montrer que : $\forall (n_1,\dots,n_r) \in {\mathbb{N}^*}^r,\ \forall A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K}),\ \ \exp\big(\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_r)\big) = \operatorname{diag}\left(\exp A_1,\dots,\exp A_r\right)$.
4. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\ \ \exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$.
5. Montrer que : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
6. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(\exp(A)\right)^{-1} = \exp(-A)$.
7. Montrer que : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable alors $\exp(A)$ l'est aussi.
8. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \left(\exp(A)\right)^{\top} = \exp\left(A^{\top}\right)$.
9. Montrer que : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{A^k}{k!}$ et que $\exp(A) - I_n$ est une matrice nilpotente.
10. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ \exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.
11. Montrer que : si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
12. Montrer que : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{Sp} A = \{\lambda\}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\exp(A) = e^{\lambda} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{k!}\left(A - \lambda I_n\right)^k$.
13. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \ \operatorname{Sp}\left(\exp(A)\right) = \left\{e^{\lambda},\ \ \lambda \in \operatorname{Sp}(A)\right\}$.
14. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \ \det\left(\exp(A)\right) = e^{\operatorname{Tr}(A)}$.

Exercice 3. `Calcul de l'exponentielle d'une matrice carrée.`
Calculer $\exp A$ dans chaque cas suivant :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Indication :** diagonaliser A.
4. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. **Indication :** déterminer $\operatorname{Sp} A$.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ici, deux méthodes sont possibles.
6. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **Indication :** faire un calcul par blocs.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonalisable telle que, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $|\lambda| < 1$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} A^n$ converge absolument, puis calculer sa somme.

2 Familles sommables

Exercice 5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Considérons la famille $\left(u_{p,q}\right)_{p,q\geq 1}$ définie par $u_{p,q} = \dfrac{1}{pq(p+q)}$.

1. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Soit $I_n = \left\{(i,j) \in {\mathbb{N}^*}^2,\ \ i+j=n\right\}$. Vérifier que $\left(I_n\right)_{n\geq 2}$ est une partition de ${\mathbb{N}^*}^2$.

3. Montrer que $\forall n \geq 2,\quad \displaystyle\sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q} = \frac{2H_{n-1}}{n^2}$.

4. En déduire que la famille $\left(u_{p,q}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de H_n.

Exercice 6. **`Sommabilité d'une famille indexée par` $\mathbb{Z}$.**

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs. Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ sont convergentes et que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2. Énoncer un résultat similaire lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de réels ou de complexes.

3. **Application :** soit $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $\left(r^{|n|}\,\mathrm{e}^{in\theta}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 7. **`D'après CCINP MP 2024.`** On admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Exercice 8. Montrer que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,p} = 0$ si $n = p$ n'est pas sommable.

Indication : considérons la sous-famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in I}$ où $I = \left\{(n+1,n),\ \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Exercice 9. **1.** On pose, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\ u_{m,n} = \dfrac{1}{(m+n)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de α pour que la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in{\mathbb{N}^*}^2}$ soit sommable.

2. Soit $\alpha > 0$. On pose, pour $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\ u_{m,n} = \dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$. Déterminer les valeurs de α pour que la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in{\mathbb{N}^*}^2}$ soit sommable. **Indication :** utiliser la question précédente.

Exercice 10. **`D'après CCP MP 2017.`** On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

2. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in I}$ n'est pas sommable.

Exercice 11. Soit $x \in]-1,1[$. Établir l'identité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{d}(n)x^n$ où $\mathrm{d}(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 12. **`D'après CNC MP 2019.`** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telle que la famille $\left(n^6a_n^2\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

1. Montrer que la famille $\left(n^2a_n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| \leq \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}.$$

2. En déduire que les familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables.

Exercice 13. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ u_n = \dfrac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente et calculer sa somme. **Indication :** pour le calcul de la somme, utiliser la bijection $\varphi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n,m) = 2^n(2m+1)$.

Exercice 14. **`D'après CCINP MP 2019.`**

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ une série absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que, si $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est une famille sommable de réels, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n}^{+\infty} u_{k,p}\right),\ \text{où } I_n = \left\{(k,p)\in I,\ \ kp = n\right\}.$$

2. Démontrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, la famille $\left(a_nx^{np}\right)_{(n,p)\in I}$ est sommable.

3. En déduire que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_nx^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.

Exercice 15. Démontrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ définie par, pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $u_{p,q}=\dfrac{1}{p!q!(p+q+1)}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 16. `Produit de Cauchy.`

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $w_n=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{4^k}{k!}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}w_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 17. **1.** Soit $x\in\,]-1,1[$. Démontrer, en utilisant deux méthodes différentes, que : $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

Indication : première méthode : produit de Cauchy et deuxième méthode, considérons la famille $\left(x^{i+j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

2. Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}x^n$.

Exercice 18. Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|<1$. Établir l'identité : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{a^p}{1-a^{2p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$.

Exercice 19. `D'après CCINP MP 2021.` On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1,+\infty[$ par : $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de l'entier n. On pose $I=\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $x>1$, la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in I}$ est sommable et que sa somme vaut $\left(\zeta(x)\right)^2$.

2. En déduire que $\zeta(x)^2=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{d_n}{n^x}$.

Exercice 20. `D'après Centrale PC 2023.`

1. Soit $x\in\,]-1,1[$.

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}nx^{n(k+1)}$.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\dfrac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\dfrac{nx^n}{1-x^n}$.

2. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k^3(k+1)}$.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}u_n$ converge et calculer sa somme.

3. *Un premier contre-exemple.* On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, par $b_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } i>j\\ -1 & \text{si } i=j\\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i<j\end{cases}$.

a. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

b. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

c. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}b_{i,j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}b_{i,j}$?

4. *Un second contre-exemple.* On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, par $c_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{si } i>j\\ j & \text{si } i=j\\ -2i3^{i-j} & \text{si } i<j\end{cases}$.

a. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

b. Soit $j\in\mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0}c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}c_{i,j}=\dfrac{1}{2}\dfrac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

c. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0}\sum_{i=0}^{+\infty}c_{i,j}$?