Devoir libre N°4

à rendre le mardi 02/12/2025.

Problème

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$.

1. **a.** Montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

b. En déduire que $\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$ est une série convergente.

c. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

d. Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

e. En déduire que $0 \leq \gamma \leq 1$.

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n - \gamma$.

a. Vérifier que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$.

b. En déduire que $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k}\right)$.

c. Conclure que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. On pose pour tout entier naturel non nul n, $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.

a. Donner un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

b. Vérifier que $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^3}$ puis que, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

c. Conclure que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4. **Application.** On note $\alpha_n = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, \quad H_k \geq n\right\}$ et on pose $H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

a. Justifier l'existence de α_n.

b. Etablir $\exp(n - \gamma - \varepsilon_{\alpha_n}) \leq \alpha_n < 1 + \exp(n - \gamma - \varepsilon_{\alpha_n - 1})$.

c. En déduire un équivalent de α_n.

d. Conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \mathrm{e}$.

D'après : CNC 2021 MP (extrait).

Exercice

1. Soit $x \in \left]-1, 1\right[$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(k+1)}$.

b. Montrer que la série $\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

2. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

3. *Un premier contre-exemple.* On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ -1 & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si} \quad i < j \end{cases}.$$

a. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

b. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

c. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

4. *Un second contre-exemple.* On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ j & \text{si} \quad i = j \\ -2i3^{i-j} & \text{si} \quad i < j \end{cases}.$$

a. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

b. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

c. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?

D'après : Centrale 2023 *PC (extrait).*