DEVOIR SURVEILLÉ N°2

MP Laâyoune
2025 - 2026

⋆ ⋆
⋆

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4, en plus de cette page de garde.

L'usage de la calculatrice est interdit.

⋆ ⋆ ⋆

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice

Une question de dénombrement.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. L'objectif est de démontrer la formule suivante :

$$\operatorname{Card}\left\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k,\ \ n_1 + \ldots + n_k = n\right\} = \binom{k+n-1}{n}.$$

Partie I : Un cas particulier.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ i + j = n\right\}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & [\![0,n]\!] & \longrightarrow & I_n \\ & & i & \longmapsto & (i, n-i) \end{array}$$

   est bijective.

2. En déduire $\operatorname{Card} I_n$.

Q2. **Application.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On considère la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \ u_{p,q} = \frac{\alpha^{p+q}}{(p+q+1)(p+q)!}.$$

1. Justifier soigneusement que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^2$.
2. À l'aide d'une sommation par paquets, montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable puis calculer sa somme.

Partie II : Cas général.

On admet le résultat suivant :

> Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
>
> $$\exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in]-\varepsilon, \varepsilon[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = b_n.$$

Soit $x \in]-1, 1[$. On considère la famille $(u_{n_1,\ldots,n_k})_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k}$ définie par :

$$\forall (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k,\ \ u_{n_1,\ldots,n_k} = x^{n_1+\ldots+n_k}.$$

Q3. Démontrer que la famille $(u_{n_1,\ldots,n_k})_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k}$ est sommable puis calculer sa somme.

Q4. Montrer par récurrence la formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n.$$

Q5. À l'aide d'une sommation par paquets, retrouver la somme de la famille $(u_{n_1,\ldots,n_k})_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k}$.

Q6. Conclure.

Problème 1

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ à partir d'une transformation d'Abel, puis calculer la somme lorsque $\alpha = 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[$.

Partie I : Transformation d'Abel.

Soient α et θ deux réels. Pour tout $N \geq 1$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{in\theta}$.

Q1. Discuter la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ dans les cas suivants :

1. $\alpha \leq 0$.
2. $\alpha > 1$.
3. $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Dans la suite, on suppose $0 < \alpha \leq 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Q2. Montrer que la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ est bornée.

Q3. Montrer que pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha} = \frac{S_{N+1}}{(N+1)^\alpha} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) S_n.$$

Q4. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) S_n$ est convergente.

Q5. En déduire que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \quad \text{ou} \\ 0 < \alpha \leq 1 \text{ et } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Partie II : Calcul d'une somme.

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[$.

Q6. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\, t^n}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, t} \mathrm{d}t.$$

Indication : on pourra utiliser l'identité $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} \mathrm{d}t$ pour tout $k \geq 1$.

Q7. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, t| \geq c$.

Q8. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$ est convergente et donner sa somme sous forme d'une intégrale.

Q9. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, t} \mathrm{d}t = -\ln\left(2 \sin\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i} \int_0^1 \frac{\sin\theta}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} \mathrm{d}t.$$

Q10. Soit $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

1. Vérifier que $t \longmapsto \arctan\left(\frac{t - \cos\theta}{\sin\theta}\right)$ est une primitive de $t \longmapsto \frac{\sin\theta}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}$ sur $[0, 1]$.
2. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\sin\theta}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas : $\theta \in]0, \pi[$ et $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Q11. En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$, puis celle de $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Problème 2

Étude des morphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$ et on considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les deux matrices, notées C_n et D_n, définies par :

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Partie I : Résultats préliminaires sur les matrices C_n et D_n.

Q1. Étude des matrices C_3 et D_3.

On pose $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$.

1. Écrire les matrices C_3 et D_3.
2. Vérifier que $D_3^3 = \mathrm{I}_3 = C_3^3$ et que $D_3C_3 = jC_3D_3$.
3. Montrer que la famille $(\mathrm{I}_3, D_3, D_3^2)$ est libre et qu'elle engendre le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
4. Calculer le polynôme caractéristique de C_3. La matrice C_3 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Q2. Étude préliminaire sur les matrices C_n et D_n dans le cas général.

1. Vérifier que $D_n^n = \mathrm{I}_n$.
2. Montrer que $D_nC_n = wC_nD_n$.
3. Montrer que la famille $(\mathrm{I}_n, D_n, D_n^2, \dots, D_n^{n-1})$ est libre et qu'elle engendre le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Calculer le polynôme caractéristique de C_n. La matrice C_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
5. Justifier que $C_n^n = \mathrm{I}_n$.

Q3. Une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ construite à partir des matrices C_n et D_n.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et u (resp. v) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à la matrice C_n (resp. D_n).

1. Vérifier que $u(e_n) = e_1$ et que $u(e_k) = e_{k+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $u^k(e_1) = e_{k+1}$ et que $u^n(e_1) = e_1$.
3. Calculer u^n et en déduire que $C_n^n = \mathrm{I}_n$.
4. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre et en déduire le polynôme minimal de la matrice C_n.
5. Vérifier que $vu = w.uv$ et que $v(e_k) = w^{k-1}.e_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
6. Montrer que la famille $(C_n^kD_n^\ell)_{0\leq k,\ell\leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Indication : on pourra raisonner enterme d'endomorphismes.

Partie II : Une question de réduction.

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, et f, g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^n = g^n = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad fg = w.gf.$$

Q4. Justifier que les endomorphisme f et g sont inversibles.

Q5. Montrer que les endomorphismes f et g sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont des racines n-ièmes de l'unité.

Q6. Étude des valeurs propres et des sous-espace propres de l'endomorphisme f.
Soit λ une valeur propre de f et $x_0 \in E$ un vecteur propre associé.

1. Montrer que $w\lambda$ est aussi une valeur propre de f. **Indication :** on pourra calculer $f(g(x_0))$.
2. En déduire que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $w^k\lambda$ est une valeur propre de f.
3. Montrer que le spectre de f est l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité.
4. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre de f.

Q7. Une base de E, convenable pour les endomorphisme f et g.
On vient d'établir précédemment que le spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$, vérifie : $\mathrm{Sp}(f) = \{1, w, \ldots, w^{n-1}\}$.

Soit e un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

1. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f(g^k(e)) = w^k.g^k(e)$.
2. En déduire que $(e, g(e), \ldots, g^{n-1}(e))$ est une base de E, formée de vecteurs propres de f.
3. On note $\mathcal{B} = (e, g(e), \ldots, g^{n-1}(e))$ cette base de E. Vérifier que la matrice de f (resp. g) dans la base $\mathcal{B}$ est D_n (resp. C_n).

Partie III : Application à la détermination des endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\Phi(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$ et tel que :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\right)^2, \quad \Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

Q8. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour entier naturel p, $\Phi(M^p) = \Phi(M)^p$.

Q9. Vérifier que les matrices $\Phi(D_n)$ et $\Phi(C_n)$ vérifient les relations :

$$\Phi(D_n)^n = \Phi(C_n)^n = \mathrm{I}_n \quad \text{et} \quad \Phi(D_n)\Phi(C_n) = w.\Phi(C_n)\Phi(D_n).$$

Q10. On note f_1 et g_1 les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associés aux matrices $\Phi(D_n)$ et $\Phi(C_n)$ respectivement.

1. Justifier que les endomorphismes f_1 et g_1 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifient les relations :
$$f_1^n = g_1^n = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \quad \text{et} \quad f_1 g_1 = w.g_1 f_1.$$
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de f_1 est D_n et celle de g_1 est C_n.
3. En déduire qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Phi(D_n) = PD_nP^{-1}$ et $\Phi(C_n) = PC_nP^{-1}$.

Q11. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(M) = PMP^{-1}$.

Q12. Vérifier que les applications ainsi trouvées sont bien des morphismes de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.