Endomorphismes d'un espace euclidien

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

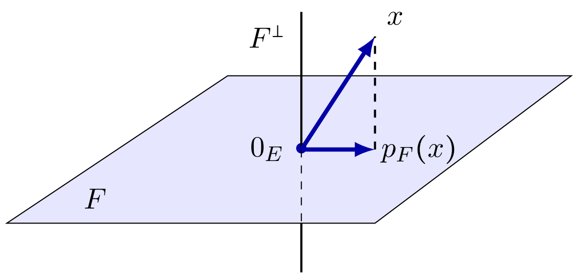
Dans ce chapitre et sauf mentionné, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Rappels et compléments sur les espaces préhilbertiens réels

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Définition 1.1. **projection orthogonale**

On appelle ***projection orthogonale*** sur F, la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.



Théorème 1.1. **expression du projeté orthogonal dans une b.o.n**

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une b.o.n. de F. $\boxed{\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i\,|\,x) e_i}$.

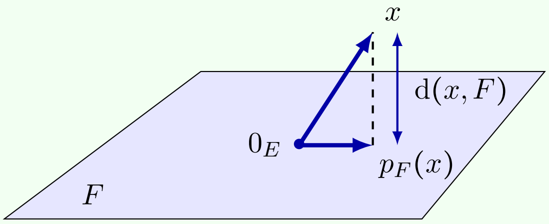
Théorème 1.2.

Soit $x \in E$. $\boxed{\forall y \in F,\ \ \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|}$ avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.

Corollaire 1.1. **la distance d'un vecteur à un sev est atteinte en son projeté orthogonal**

Soit $x \in E$.

$$\boxed{\mathrm{d}(x,F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}}.$$



Théorème 1.3. **inégalité de Bessel**

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de vecteurs de E.

Pour tout $x \in E$, la suite $\big((x \mid e_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de carré sommable et $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} (x \mid e_n)^2 \leq \|x\|^2}$.

2 Formes linéaires et adjoint

Le couple $\big(E, (.\mid.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Formes linéaires d'un espace euclidien

Soit $a \in E$. L'application $\begin{array}{rccl} \varphi_a & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & (a \mid x) \end{array}$ est une forme linéaire sur E.

Théorème 2.1. **représentation des formes linéaires dans un espace euclidien**

L'application $\begin{array}{rccl} \Phi & : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ & & a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels appelé ***l'isomorphisme canonique*** de E vers $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. En particulier, $\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}),\ \exists!\ a \in E,\ \forall x \in E,\ \ \varphi(x) = (a \mid x)}$.

Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 2.1. **existence de l'adjoint dans un espace euclidien**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ ***unique*** tel que $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \ \big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid v(y)\big)}$. L'endomorphisme v est appelé ***l'adjoint*** de u. On le note $u^\star$.

Exemple 2.1. ■ L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u_A(X) = XA$. Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\big(u_A(X) \mid Y\big) = \mathrm{Tr}\big((XA)^\top Y\big) = \mathrm{Tr}\left(A^\top X^\top Y\right) = \mathrm{Tr}\left(X^\top Y A^\top\right) = \left(X \mid YA^\top\right) = \big(X \mid u_{A^\top}(Y)\big).$$

D'où $u_A^\star = u_{A^\top}$.

Proposition 2.2. **matrice de l'adjoint dans une b.o.n**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $\boxed{A^\top = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^\star)}$.

Proposition 2.3. **propriétés**

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\big(\lambda u + \mu v\big)^\star = \lambda u^\star + \mu v^\star$.
2. $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$.
3. $(u^\star)^\star = u$.
4. $\mathrm{rg}\,(u^\star) = \mathrm{rg}\,(u)$.
5. $\ker(u^\star) = \mathrm{Im}\,(u)^\perp$.
6. $\mathrm{Im}\,(u^\star) = \ker(u)^\perp$.

Théorème 2.2. **sous-espaces stables**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sev de E stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par $u^{\star}$.

3 Matrices orthogonales, isométries vectorielles

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Matrices orthogonales

Définition 3.1. **matrice orthogonale**

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale*** si $A^{\top}A = \mathrm{I}_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n. $\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ A^{\top}A = \mathrm{I}_n\right\}}$.

Remarque 3.1. ■ $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^{\top}$.

■ Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) = \pm 1$.

Proposition 3.1. **structure de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$**

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times\big)$ appelé ***groupe orthogonal*** d'ordre n.

Théorème 3.1. **caractérisation par la famille des lignes, des colonnes**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

(i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;

(ii) Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale[1] de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

(iii) Les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

1. Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $(X\,|\,Y) = X^{\top}Y$.

Exemple 3.1. ■ $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale : ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Théorème 3.2. **matrice de passage entre deux b.o.n**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :

(i) $\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E ;

(ii) $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si tel est le cas, $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P^{\top}}$.

Définition 3.2. **matrices orthogonalement semblables**

On dit que A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont ***orthogonalement semblables*** s'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{\top}AP$.

Définition 3.3. **matrice orthogonale positive, négative**

1. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale positive*** ou ***directe*** si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 1$. On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives. $\boxed{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \ \det(A) = 1\right\}}$.

2. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale négative*** ou ***indirecte*** si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(A) = -1$. On note $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales négatives. $\boxed{\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \ \det(A) = -1\right\}}$.

Proposition 3.2. **structure de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$**

L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe[1] de $\big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\times\big)$ appelé ***groupe spécial orthogonal*** d'ordre n.

1. Attention, l'ensemble $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe : $\mathrm{I}_n \notin \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Proposition 3.3.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux b.o.n.d. (base orthonormale directe) de l'espace euclidien orienté E.

$$\boxed{\forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,\ \ \det_{\mathcal{B}}\big(u_1,\dots,u_n\big)=\det_{\mathcal{B}'}\big(u_1,\dots,u_n\big)}.$$

Isométries vectorielles

Définition 3.4. **isométrie vectorielle**

On dit que $u\in\mathcal{L}(E)$ est une ***isométrie vectorielle*** ou ***automorphisme orthogonal*** de E si u conserve la norme : $\boxed{\forall x\in E,\ \ \|u(x)\|=\|x\|}$.

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. $\boxed{\mathcal{O}(E)\overset{\text{déf}}{=}\Big\{u\in\mathcal{L}(E),\ \ \forall x\in E,\ \ \|u(x)\|=\|x\|\Big\}}$.

Théorème 3.3. **caractérisation des isométries vectorielles**

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u\in\mathcal{O}(E)$;

(ii) $\forall (x,y)\in E^2,\ \ \big(u(x)\,|\,u(y)\big)=(x\,|\,y)$;

(iii) u transforme une (toute) b.o.n. de E en une b.o.n de E ;

(iv) $\mathrm{Mat}\,(u)$ dans une (toute) b.o.n. de E est une matrice orthogonale ;

(v) $u^\star\circ u=\mathrm{Id}_E$.

Remarque 3.2. ■ Si $u\in\mathcal{O}(E)$ alors $\det(u)=\pm1$.

Définition 3.5. **isométrie vectorielle directe, indirecte**

1. On dit que $u\in\mathcal{L}(E)$ est une ***isométrie positive*** ou ***directe*** si $u\in\mathcal{O}(E)$ et $\det(u)=1$. On note $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$ l'ensemble des isométries positives[1]. $\boxed{\mathcal{SO}(E)\overset{\text{déf}}{=}\Big\{u\in\mathcal{O}(E),\ \ \det(u)=1\Big\}}$.

2. On dit que $u\in\mathcal{L}(E)$ est une ***isométrie négative*** ou ***indirecte*** si $u\in\mathcal{O}(E)$ et $\det(u)=-1$. On note $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries négatives. $\boxed{\mathcal{O}^-(E)\overset{\text{déf}}{=}\Big\{u\in\mathcal{O}(E),\ \ \det(u)=-1\Big\}}$.

1. Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont appelés aussi des ***rotations*** de E.

Proposition 3.4. **structure de $\mathcal{SO}(E)$**

L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe[1] de $\big(\mathcal{GL}(E),\circ\big)$ appelé ***groupe spécial orthogonal***.

1. Attention, l'ensemble $\mathcal{O}^-(E)$ n'est pas un groupe : $\mathrm{Id}_E\notin\mathcal{O}^-(E)$.

Théorème 3.4. **caractérisation des isométries positives**

Soit E un espace euclidien orienté et $u\in\mathcal{L}(E)$.
$u\in\mathcal{SO}(E)$ si, et seulement si, u transforme une (toute) b.o.n.d. de E en une b.o.n.d. de E.

Remarque 3.3. ■ Soit E un espace euclidien orienté et $u\in\mathcal{L}(E)$.

- $u\in\mathcal{SO}(E)$ si, et seulement si, u transforme une (toute) b.o.n. de E en une b.o.n. de E de même orientation.
- $u\in\mathcal{O}^-(E)$ si, et seulement si, u transforme une (toute) b.o.n. de E en une b.o.n. de E d'orientation opposé.

Isométries vectorielles en dimension 2

Le couple $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Proposition 3.5. **description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$**

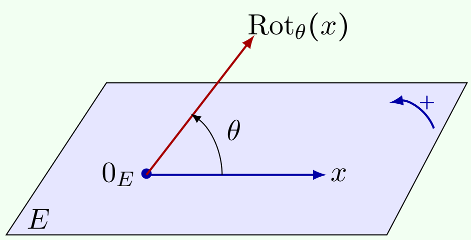
1. $\boxed{\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a^2+b^2=1\right\}}$.
2. $\boxed{\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \text{ avec } \theta\in\mathbb{R}\right\}}$ et $\boxed{\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \text{ avec } \theta\in\mathbb{R}\right\}}$.

Remarque 3.4. ■ L'application $R : \begin{array}{ccc}(\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta)\end{array}$ est un morphisme de groupes surjectif appelé le ***morphisme canonique*** de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe ***commutatif***.

Théorème 3.5. **nature des isométries positives**

Soit $u\in\mathcal{SO}(E)$.

1. Il existe ***un unique*** $\theta\in\,]-\pi,\pi]$ tel que pour ***toute b.o.n.d.*** $\mathcal{B}$ de E : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)}$. On dit que u est la ***rotation vectorielle*** d'angle θ et on note $u = \mathrm{Rot}_\theta$.
2. Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une b.o.n.d. de E.
$\boxed{\mathrm{Rot}_\theta(\vec{i}) = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j} \ \text{ et } \ \mathrm{Rot}_\theta(\vec{j}) = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}}$.



Remarque 3.5. ■ $\mathcal{SO}(E)$ est un groupe ***commutatif*** (ici E est un plan euclidien).

Corollaire 3.1. **classification des isométries d'un plan euclidien**

Dans un plan euclidien E, toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation.

Théorème 3.6. **les réflexions engendrent $\mathcal{SO}(E)$**

1. Toute rotation est la composée de deux réflexions.
2. Plus précisément, si $r\in\mathcal{SO}(E)$ et $s\in\mathcal{O}^-(E)$, alors il existe $s_1\in\mathcal{O}^-(E)$ ***unique*** tel que[1] $\boxed{r = s_1\circ s}$.

1. De même, il existe $s_2\in\mathcal{O}^-(E)$ ***unique*** tel que $r = s\circ s_2$.

4 Réduction des isométries vectorielles

Réduction des isométries vectorielles

Le couple $\big(E,(.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n\geq 1$.

Théorème 4.1. **sous-espaces stables par une isométrie, spectre**

1. Si $u\in\mathcal{O}(E)$ et F un sev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.
2. Si $u\in\mathcal{O}(E)$ alors $\mathrm{Sp}\,(u)\subset\{-1,1\}$ et les sous-espaces $\ker(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\ker(u+\mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

Théorème 4.2. **réduction d'une isométrie dans une b.o.n**

Soit $u\in\mathcal{O}(E)$. Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que : $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R(\theta_1),\dots,R(\theta_r)\right)}$
avec $\theta_1,\dots,\theta_r\in\mathbb{R}$ et $p,q,r\in\mathbb{N}$ tels que $p = \dim\big(\ker(u-\mathrm{Id}_E)\big)$, $q = \dim\big(\ker(u+\mathrm{Id}_E)\big)$ et $p+q+2r = n$.

Remarque 4.1. ■ Le groupe $\mathcal{SO}(E)$ ***n'est pas commutatif*** pour $\dim(E) \geq 3$.

Théorème 4.3. **réduction d'une matrice orthogonale**

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\boxed{A = PRP^\top \quad \text{où} \quad R = \operatorname{diag}\left(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r)\right)}$ avec $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{R}$ et $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2r = n$.

Isométries vectorielles en dimension 3

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Proposition 4.1. **rotation de l'espace**

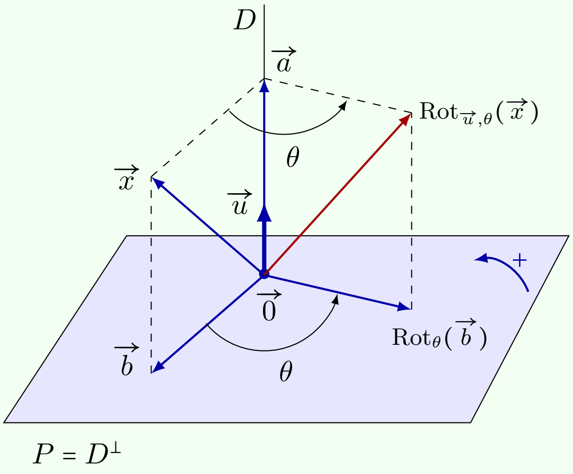
Soit $f \in \mathcal{SO}(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$ (rotation autre que l'identité).

1. $1 \in \mathrm{Sp}(f)$.

2. f peut être représentée dans une b.o.n. par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

On dit que f est la ***rotation d'axe dirigée et orienté par*** $\vec{u}$ ***et d'angle*** θ. On la note $\mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta}$.



Remarque 4.2 (Propriétés de $\mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta}$).

- Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \, [2\pi]}$ et $\boxed{\mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta'} = \mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta'} \circ \mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta+\theta'}}$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{Rot}^{-1}_{\vec{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{\vec{u},-\theta}}$ et $\boxed{\mathrm{Rot}_{\vec{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{-\vec{u},-\theta}}$.

5 Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

Le couple $\left(E, (.\,|\,.)\right)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Endomorphismes autoadjoints

Définition 5.1. **endomorphisme autoadjoint**

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est ***autoadjoint*** ou ***symétrique*** si $\boxed{u^\star = u}$.

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E. $\boxed{\mathscr{S}(E) \overset{\text{déf}}{=} \left\{u \in \mathcal{L}(E), \ u^\star = u\right\}}$.

Théorème 5.1. **caractérisation des endomorphismes autoadjoints**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u \in \mathscr{S}(E)$;

(ii) $\forall x, y \in E, \ \left(u(x) \,|\, y\right) = \left(x \,|\, u(y)\right)$;

(iii) $\mathrm{Mat}\,(u)$ dans une (toute) b.o.n. de E est une matrice symétrique.

Exemple 5.1. ■ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P \,|\, Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et φ l'endomorphisme de E définie, pour tout $P \in E$, par $\varphi(P) = \left((X^2 - 1)P'\right)'$.

- Pour tout $P, Q \in E$, on a :

$$\begin{aligned}(\varphi(P) \mid Q) &= \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)P'(t)\right)' Q(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\underbrace{\left[(t^2-1)Q'(t)P(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)Q'(t)\right)' P(t)\mathrm{d}t = (P \mid \varphi(Q))\end{aligned}$$

D'où $\varphi \in \mathscr{S}(E)$.

Corollaire 5.1. **structure de $\mathscr{S}(E)$**

$\mathscr{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En particulier $\boxed{\dim \mathscr{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Réduction des endomorphismes autoadjoints

Théorème 5.2. **stabilité de l'orthogonal d'un sev stable**

Si $u \in \mathscr{S}(E)$ et F un sev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u et on a : $u_F \in \mathscr{S}(F)$, $u_{F^\perp} \in \mathscr{S}(F^\perp)$.

Proposition 5.1. **propriétés**

Si $u \in \mathscr{S}(E)$ alors le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux pour $\lambda \neq \mu$.

Théorème 5.3. **théorème spectral (version vectorielle)**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u \in \mathscr{S}(E)$;

(ii) $E = \overset{\perp}{\underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}{\bigoplus}} E_\lambda(u)$.

(iii) u est diagonalisable dans une b.o.n. de E ;

Théorème 5.4. **théorème spectral (version matricielle)**

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $\boxed{A = PDP^\top}$.

Exemple 5.2. ■ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^\top$.

- $\chi_A(X) = (X-1)(X+2)^2$. On a $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

- Sans calcul, on peut affirmer que $E_1(A)$ est une droite normale[1] au plan $E_{-2}(A)$: $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On obtient une b.o.n. du plan $E_{-2}(A)$ en considérant les vecteurs $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. un vecteur normal au plan est le produit vectoriel de deux vecteurs qui engendrent ce plan.

- On obtient une b.o.n. de la droite $E_1(A)$ avec le vecteur $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
- Les vecteurs e_1, e_2, e_3 déterminent alors les colonnes d'une matrice de passage orthogonale P convenable

$$A = PDP^\top \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Remarque 5.1. ■ La matrice $A = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est symétrique non diagonalisable car nilpotente ($A^2 = O_2$).

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition 5.2. **endomorphisme autoadjoint positif, défini positif**

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. On dit que u est ***positif*** si $\boxed{\forall x \in E,\ \big(u(x) \mid x\big) \geq 0}$. On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E.

2. On dit que u est ***défini positif*** si $\boxed{\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \big(u(x) \mid x\big) > 0}$. On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.

Théorème 5.5. **caractérisation spectrale**

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. On a $\boxed{u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathbb{R}^+}$ et $\boxed{u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathbb{R}^{+*}}$.

Exemple 5.3. ■ L'endomorphisme φ (exemple ci-dessus) de $E = \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = \big((X^2-1)P'\big)'$ vérifie :

- $\varphi \in \mathscr{S}(E)$. De plus, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X$ et $\varphi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$ pour $2 \leq k \leq n$.
- La matrice de φ dans la base canonique de E est triangulaire supérieure et $\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \big\{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\big\}$.

Ainsi $\varphi \in \mathscr{S}^+(E)$.

Définition 5.3. **matrice symétrique positive, définie positive**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est ***positive*** si $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geq 0}$. On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives d'ordre n.

2. On dit que A est ***définie positive*** si $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\},\ X^\top AX > 0}$. On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n.

Théorème 5.6. **caractérisation spectrale**

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a $\boxed{A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}^+}$ et $\boxed{A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}^{+*}}$.

Remarque 5.2. ■ $\mathscr{S}^{++}(E) = \mathscr{S}^+(E) \cap \mathcal{GL}(E)$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

■ Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E. $u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.