Espaces préhilbertiens réels (rappel MPSI)

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce chapitre et sauf mentionné, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Produit scalaire, norme euclidienne

Définition 1.1. **produit scalaire, espace préhilbertien réel**

On appelle ***produit scalaire*** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant [1] :

1. φ bilinéaire : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
   - **a.** $\varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x,z) + \lambda \varphi(y,z)$.
   - **b.** $\varphi(x, y + \lambda z) = \varphi(x,y) + \lambda \varphi(x,z)$.
2. φ symétrique : $\forall (x,y) \in E^2,\quad \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
3. φ positive : $\forall x \in E,\quad \varphi(x,x) \geq 0$.
4. φ définie : $\forall x \in E,\quad \varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$.

On dit alors que le couple $\big(E, (.\mid.)\big)$ est appelé un ***espace préhilbertien réel***.

1. On dit qu'un produit scalaire est une ***forme bilinéaire symétrique définie positive***.

Définition 1.2. **norme euclidienne, distance euclidienne**

1. On appelle ***norme euclidienne*** sur E l'application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\boxed{\forall x \in E,\ \ \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}$.
2. On appelle ***distance*** séparant deux vecteurs x et y de E le réel $\boxed{\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\|}$.

Proposition 1.1. **règles de calcul**

Soit $(x,y) \in E^2$.

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$.
2. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$.
3. $(x - y \mid x + y) = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Proposition 1.2. **identités remarquables**

1. $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. (identité du parallélogramme)
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \mid y) = \dfrac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)$. (identité du polarisation)

Théorème 1.1. **inégalité de Cauchy-Schwartz**

$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ |(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|}$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont liés.

Théorème 1.2. **inégalité triangulaire**

$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont liés et de produit scalaire positif.

2 Orthogonalité

Le couple $\big(E, (.\mid .)\big)$ désigne un espace préhilbertien réel.

Vecteurs orthogonaux

Définition 2.1. **vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, famille orthonormale**

1. Deux vecteurs x et y de E sont dits ***orthogonaux*** si $(x \mid y) = 0$.
2. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est ***orthogonale*** si $\boxed{\forall i,j \in I,\ \ i \neq j \implies (e_i \mid e_j) = 0}$.
3. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est ***orthonormale*** si[1] $\boxed{\forall i,j \in I,\ \ (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}}$.

1. $\delta_{i,j}$ est le symbol de Kronecker : $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Théorème 2.1. **théorème de Pythagore**

1. Si x et y sont deux vecteurs de E, alors $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux} \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$.
2. Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E alors[1] $\boxed{\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2}$.

1. La réciproque est fausse pour $n \geq 3$: considérons dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ et $e_3 = (1,-1)$.

Corollaire 2.1. **liberté d'une famille orthonormale**

Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Théorème 2.2. **orthonormalisation de Gram-Schmidt**

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une ***unique*** famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ vérifiant : $\boxed{\mathrm{Vect}\big(u_1, \ldots, u_k\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1, \ldots, e_k\big) \quad \text{et} \quad (e_k \mid u_k) > 0 \quad \text{pour tout} \quad k \in [\![1,n]\!]}$.
On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est la ***famille orthonormalisée*** de $(u_1, \ldots, u_n)$ par le procédé de Schmidt.

Remarque 2.1 (Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

- La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est donnée par $\boxed{e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad e_k = \dfrac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1}(u_k \mid e_i)e_i}{\left\|u_k - \sum_{i=1}^{k-1}(u_k \mid e_i)e_i\right\|} \quad \text{pour} \quad k \in [\![2,n]\!]}$.

Orthogonal d'une partie

Définition 2.2. **orthogonal d'une partie**

On appelle ***orthogonal*** d'une partie A de E, l'ensemble noté $A^\perp$ défini par $\boxed{A^\perp = \left\{x \in E,\ \forall a \in A,\quad (a \mid x) = 0\right\}}$.

Proposition 2.1. **propriétés de l'orthogonal d'une partie**

Soit A et B deux parties de E.

1. $A^\perp$ est un sev de E. | **2.** $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$. | **3.** $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$. | **4.** $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.

Définition 2.3. **sous-espaces vectoriels orthogonaux**

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits ***orthogonaux*** si $\boxed{\forall (x, y) \in F \times G,\quad (x \mid y) = 0}$.

Remarque 2.2. ■ Si F et G sont orthogonaux, alors $F \cap G = \left\{0_E\right\}$.

Théorème 2.3. **deux à deux orthogonaux vs somme directe**

Si $F_1, \ldots, F_k$ sont des sev de E deux à deux orthogonaux alors ceux-ci sont en somme directe.

Définition 2.4. **somme directe orthogonale**

Lorsque les sev $F_1, \ldots, F_k$ sont deux à deux orthogonaux, on dit qu'ils sont en ***somme directe orthogonale*** et leur somme est notée $\overset{\perp}{\underset{1 \leq i \leq k}{\bigoplus}} F_i$.

3 Espaces vectoriels euclidiens

Le couple $\left(E, (.\mid.)\right)$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 3.1. **espace euclidien**

On appelle ***espace euclidien*** tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Définition 3.2. **base orthonormale (b.o.n)**

Une ***base orthonormale*** d'un espace euclidien est une famille de vecteurs qui est à la fois une base et une famille orthonormale.

Théorème 3.1. **existance d'une b.o.n dans un espace euclidien**

Tout espace euclidien possède une base orthonormale.

Théorème 3.2. **théorème de la b.o.n incomplète**

Toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

Théorème 3.3. **coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n de E. $\boxed{x \in E,\quad x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x) e_i}$.

Théorème 3.4. **expression du produit scalaire et de la norme dans une b.o.n**

1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$ alors $\boxed{(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

2. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une b.o.n de E et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, alors $\boxed{(x \mid y) = {}^tXY \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = {}^tXX}$.

4 Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Le couple $(E, (. \mid .))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Théorème 4.1. **supplémentaire orthogonal**

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

1. $\boxed{F \oplus F^{\perp} = E}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$. L'espace $F^{\perp}$ est appelé le[1] ***supplémentaire orthogonal*** de F.
2. Si de plus E est de dimension finie, alors $\boxed{\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F}$.

1. Le supplémentaire orthogonal lorsqu'il existe, il est unique.

Projection orthogonale et symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

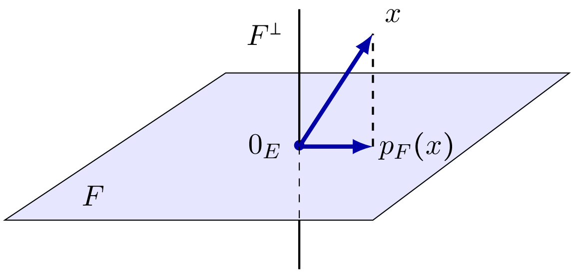
Définition 4.1. **projection orthogonale**

On appelle ***projection orthogonale*** sur F, la projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Remarque 4.1.

- p_F est caractérisé par : $\boxed{y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}}$.
- Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de F. Alors
  - $\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.
  - On calcule les λ_i, $1 \leq i \leq p$ grâce aux relations

$$(x - p_F(x) \mid v_i) = 0, \quad i \in [\![1, p]\!].$$



Théorème 4.2. **expression du projeté orthogonal dans une b.o.n**

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une b.o.n de F. $\boxed{\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i}$.

Proposition 4.1. **expression du projeté orthogonal, cas d'une droite et d'un hyperplan**

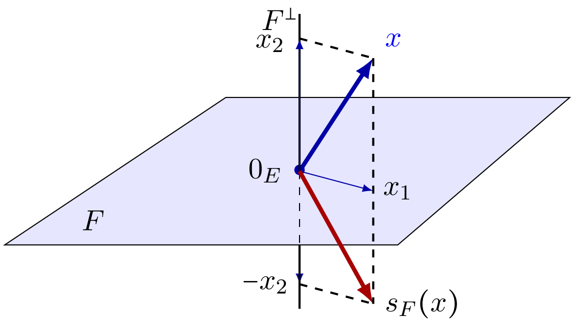
1. Soit $a \in E \setminus \{0_E\}$ et $D = \mathrm{Vect}(a)$. $\boxed{\forall x \in E,\ \ p_D(x) = \dfrac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a}$.
2. Soit H un hyperplan de vecteur normal $a \in E \setminus \{0_E\}$. $\boxed{\forall x \in E,\ \ p_H(x) = x - \dfrac{(a \mid x)}{\|a\|^2} a}$.

Définition 4.2. **symétrie orthogonale**

On appelle ***symétrie orthogonale*** par rapport à F, la symétrie s_F par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$.

Remarque 4.2. ■ Si F est un hyperplan H, on parle de ***réflexion*** d'hyperplan H.

- $s_F(x)$ est caractérisé par : $\boxed{y = s_F(x) \iff \begin{cases} x + y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}}$.



Théorème 4.3. **expression de symétrie orthogonale dans une b.o.n**

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une b.o.n de F. $\boxed{\forall x \in E,\quad s_F(x) = 2\sum_{i=1}^{p}(e_i \mid x)e_i - x}$.

Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Définition 4.3. **distance d'un vecteur à un sev de dimension finie**

Soit $x \in E$. On appelle ***distance*** de x à F le réel positif $\boxed{\mathrm{d}(x, F) \overset{\text{déf}}{=} \inf_{y \in F}\|x - y\|}$.

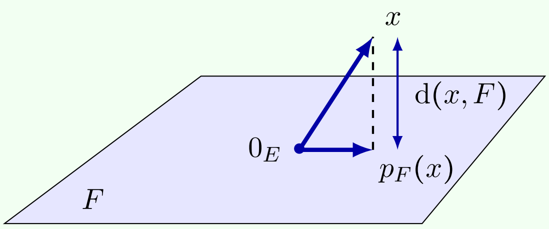
Théorème 4.4.

Soit $x \in E$. $\boxed{\forall y \in F,\quad \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|}$ avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.

Corollaire 4.1. **la distance d'un vecteur à un sev est atteinte en son projeté orthogonal**

Soit $x \in E$.

$$\boxed{\mathrm{d}(x, F) = \min_{y \in F}\|x - y\| = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}}.$$



Corollaire 4.2. **inégalité de Bessel**

$$\boxed{\forall x \in E,\quad \|p_F(x)\| \leq \|x\|}.$$

5 Une sélection d'exercices

Exercice 5.1 : Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique : $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1. Montrer que la base canonique de E est orthonormale pour ce produit scalaire.
2. Montrer l'inégalité ci-contre en déterminant le cas d'égalité : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exercice 5.2 : On pose, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})Q(\mathrm{e}^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o.n. pour ce produit scalaire.

Exercice 5.3 : Soit $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ muni de produit scalaire $(f \mid g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Montrer que la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ définie par $s_n(t) = \sin(nt)$ est orthonormale.

Exercice 5.4 : Pour A et B dans $\in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose $(A \mid B) = \operatorname{Tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $(.\mid.)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une b.o.n. pour le produit scalaire précédent.

Exercice 5.5 : On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Orthonormaliser par le procédé de Schmidt la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

Exercice 5.6 : On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x - z = 0\right\}$.

Exercice 5.7 : Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f dans une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Justifier que $a_{i,j} = \left(e_i \mid f(e_j)\right)$ pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 5.8 : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace euclidien E vérifiant : $\sum_{k=1}^{n}(e_k \mid x)^2 = \|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n. de E.

Exercice 5.9 : Dans l'espace $\mathcal{C}^0\left([-1,1], \mathbb{R}\right)$ muni de produit scalaire $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$, montrer que le sev des fonctions paires et le sev des fonctions impaires sont orthogonaux.

Exercice 5.10 : Soit E un espace préhilbertien réel et F, G deux sev de E. Montrer que F et G sont orthogonaux si, et seulement si, $F \subset G^{\perp}$.

Exercice 5.11 : **1.** Soit A et B deux parties d'un espace préhilbertien réel E. Montrer

a. $A^{\perp}$ est un sev de E. **b.** $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$. **c.** $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$. **d.** $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

2. Soit F et G deux sev de E. Montrer $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \bigcap G^{\perp}$ et $(F \bigcap G)^{\perp} \supset F^{\perp} + G^{\perp}$. Que devient cette inclusion si l'on suppose que l'espace E est euclidien ?

Exercice 5.12 : Soit F et G deux sev supplémentaires et orthogonaux d'un espace préhilbertien E. Montrer $G = F^{\perp}$.

Exercice 5.13 : Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\left(f(x), f(y)\right) = (x, y)$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.

2. Soit F un sev de E. Montrer que $f\left(F^{\perp}\right) = \left(f(F)\right)^{\perp}$.

Exercice 5.14 : **1.** On muni $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique. Former la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur l'espace $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \ x-y-z-t = x-z-2t = 0\right\}$.

2. Calculer la distance à F du vecteur $v = (1,2,3,4)$.

Exercice 5.15 : On considère un espace euclidien E muni d'une b.o.n. $\mathcal{B} = (i,j,k)$. Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 5.16 : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique donné par $(A \mid B) = \mathrm{Tr}\left(A^{\top}B\right)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Exprimer le projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $H = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{Tr}(M) = 0\right\}$.

a. Justifier que H est un hyperplan et déterminer un vecteur normal de H.

b. Exprimer simplement la distance à H d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\min_{M\in H}\|M - J\|$.

Exercice 5.17 : Calculer $m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - (at+b)\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 5.18 : Soient $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ et $F = \mathbb{R}_1[X]$. Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q = 1 + X + X^2 + X^3$ sur F par deux méthodes différentes :

a. En utilisant l'expression du projeté orthogonal dans une b.o.n. de F.

b. En utilisant la caractérisation du projeté orthogonal.

Exercice 5.19 : Soient $\left(E, (.\mid.)\right)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\|.\|$ la norme euclidienne associée et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 5.20 : Soient $\left(E, (.\mid.)\right)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\|.\|$ la norme euclidienne associée et f une fonction de E vers E vérifiant : $f(0_E) = 0_E$ et $\forall\ (x,y) \in E^2,\ \ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$ pour tout x de E.

2. Établir $\left(f(x) \mid f(y)\right) = (x \mid y)$ pour tous x et y de E.

3. En introduisant une b.o.n. de E, établir que l'application f est linéaire.