rappel MPSI

Intégrales généralisées (correction)

Corrigé de l'exercice 1. **1.** La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t+1}{t^4+1}$ est cpm et positive sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 3 > 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. $f : t \longmapsto \dfrac{\arctan t}{t}$ est cpm et positive sur $]0,+\infty[$ et $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2t}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann $\alpha = 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

3. $f : t \longmapsto \dfrac{t}{t^2+1}$ est cpm et positive sur $[0,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann $\alpha = 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

4. $f : t \longmapsto t\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est cpm sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1\mathrm{d}t$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

5. $f : t \longmapsto t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est cpm et positive sur $[0,+\infty[$ et $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

6. $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t(t+1)}$ est cpm et positive sur $[1,+\infty[$ et $t^{3/2} f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

7. $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t+1}$ est cpm et positive sur $[1,+\infty[$ et $tf(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(f(t))$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann $\alpha = 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

8. $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^{3/2}}$ est cpm sur $]0,+\infty[$ et

- au voisinage de 0^+ : $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann $\alpha = 1$).
- au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

9. $f : t \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t}$ est cpm sur $]0,1]$ et $f(t) \underset{t\to0^+}{=} \dfrac{1+\frac{t}{2}+o(t)-1}{t} \xrightarrow[t\to0^+]{} \dfrac{1}{2}$. Donc f est prolongeable par continuité en 0^+ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

10. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \Big[\arcsin t\Big]_0^x = \arcsin x \xrightarrow[x\to1]{} \frac{\pi}{2}$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to1^-} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{2}$.

11. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^t - 1}$ est cpm sur $]0,1]$ et $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann $\alpha = 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

12. $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est cpm sur $]0,1]$ et $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 1/2 < 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

13. $f : t \longmapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ est cpm sur $]0,1[$ et

$$f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} 0, \quad f(t) \underset{t=1+h}{=} \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow[h\to0^-]{} 1.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 et 1 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge.

14. $f : t \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est cpm sur $]0,+\infty[$ et

- au voisinage de 0^+ :
$$\sqrt{t}f(t) = \sqrt{t}\ln(1+t^2) - 2\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$
donc $f(t) \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 1/2 < 1$).
- au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$).

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

15. $f : t \longmapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$ et $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_x^1 = x - 1 - x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} F(x) = -1$.

16. $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{\ln(t+1)}$ est cpm sur $]0,1]$ et $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln t}{t}$ donc $tf(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$ i-e $\dfrac{1}{t} \underset{0^+}{=} o(f(t))$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann $\alpha = 1$) alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

17. $f : t \longmapsto \exp\left(-\left(t^2+\dfrac{1}{t^2}\right)\right)$ est cpm sur $]0,+\infty[$ et

- au voisinage de 0^+ : $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.
- au voisinage de $+\infty$:
$$t^2 f(t) = \underbrace{t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}}_{\to 0}\,\mathrm{e}^{-1/t^2} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0.$$
donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$).

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

18. $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est cpm sur $]1,\mathrm{e}]$ et $f(t) \underset{t=1+h}{=} \dfrac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

19. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ est cpm sur $[0,1[$ et $f(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1/2}{1-t}$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

20. $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^3-1}$ est cpm sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

- au voisinage de 0^+ : $\sqrt{t}f(t) \underset{0^+}{\sim} -\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc $f(t) \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 1/2 < 1$).
- au voisinage de 1 : $f(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{\ln t}{3(t-1)} \xrightarrow[t\to 1]{} \dfrac{1}{3}$ donc f est prolongeable par continuité en 1.
- au voisinage de $+\infty$:
$$t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0.$$
donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$).

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Corrigé de l'exercice 2. **1.** $f : t \longmapsto \dfrac{\arctan t}{t^\alpha}$ est cpm et positive sur $]0,+\infty[$ et

- au voisinage de 0 : $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha-1}}$ converge ssi $\alpha < 2$.
- au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge ssi $1 < \alpha < 2$.

2. $f : t \longmapsto \dfrac{1-\tanh t}{t^\alpha}$ est cpm et positive sur $]0,+\infty[$ et

- au voisinage de 0 : $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.
- au voisinage de $+\infty$: $f(t) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2t}}{(1+\mathrm{e}^{-2t})t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2t}}{t^\alpha}$ et $\mathrm{e}^t f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ donc $f(t) \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{-t})$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.

Corrigé de l'exercice 3. **1.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln 2.$

2. Puisque $t \longmapsto tf(t)$ admet une limite finie en 0 et en $+\infty$, alors par une intégration par parties on a

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \underbrace{\left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \pi.$$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{\sqrt{t}=s}{=} 2\int_0^{+\infty} se^{-s}\mathrm{d}s = 2\left[-se^{-s}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-s}\mathrm{d}s = 2\left[-e^{-s}\right]_0^{+\infty} = 2.$

Corrigé de l'exercice 4. **1.** $f_n : t \longmapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour $n \geq 1$, la fonction $t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}\,t^n$ admet une limite finie en $+\infty$ donc

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\Big[-t^n\,\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{+\infty} nt^{n-1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t}_{=-nI_{n-1}} = nI_{n-1}.$$

D'où $I_n = n!I_0 = n!\Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = n!$.

2. $f_n : t \longmapsto |\ln t|^n$ est continue et positive sur $]0,1]$ et $\sqrt{t}f_n(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.

Pour $n \geq 1$, la fonction $t \longmapsto t|\ln t|^n$ admet une limite finie en 0^+ donc

$$I_n = \int_0^1 |\ln t|^n\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^1 \ln^n t\mathrm{d}t = (-1)^n\underbrace{\Big[t\ln^n t\Big]_0^1}_{=0} + n\underbrace{(-1)^{n-1}\int_0^1 (\ln t)^{n-1}\mathrm{d}t}_{=I_{n-1}}.$$

Donc $I_n = nI_{n-1}$. Soit $I_n = n!I_1 = n!$ car $I_1 = 1$.

3. $f_{p,q} : t \longmapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0,1]$.

- Si $q = 0$ alors $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $-p < 1$.
- Si $q \in \mathbb{N}^*$ alors pour $\alpha = \dfrac{1-p}{2} \in]-p,1[$ on a $f_{p,q}(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc $f_{p,q}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Par une intégration par parties successives on obtient

$$\int_0^1 f_{p,q}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^p(\ln t)^q\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\right]_0^1}_{=0} - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}\mathrm{d}t = (-1)^2\frac{q(q-1)}{(p+1)^2}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-2}\mathrm{d}t.$$

En répétant les intégrations par parties jusqu'à disparition du facteur $\ln t$, on obtient $\displaystyle\int_0^1 t^p(\ln t)^q\mathrm{d}t = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$.

Corrigé de l'exercice 5. **1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*0$. $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est cpm sur $[0,+\infty[$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{2n}}$ converge $(2n > 1)$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

2. Soit $X > 0$. On a

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^X + \int_0^X \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{X}{(1+X^2)^n} + 2n\left(\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} - \int_0^X\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}\right).$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, toutes les limites existent, et on obtient $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ soit $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}I_n$. Donc

$$I_n = I_1\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}I_1.$$

Or $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad I_n = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}$.

Corrigé de l'exercice 6. **1.** Soit $f : [0,+\infty[\longmapsto \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ avec $\lambda = -\alpha + \mathrm{i}\omega$. On a

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}\right]_0^x = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}-1}{\lambda}.$$

Puisque $\mathrm{e}^{\lambda x} = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}_{\text{bornée}}\mathrm{e}^{-\alpha x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{-1}{\lambda}$.
La partie réelle et la partie imaginaire de cette intégrale sont donc aussi convergentes ce qui assure l'existence des intégrales définissant $C(\alpha,\omega)$ et $S(\alpha,\omega)$. D'où :

$$C(\alpha,\omega) = \mathrm{Re}\left(\frac{-1}{\lambda}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \quad\text{et}\quad S(\alpha,\omega) = \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

2. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+2\alpha t+\beta}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car le discriminant $\Delta = 4(\alpha^2-\beta) < 0$. On a : $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2\alpha t+\beta}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+\alpha)^2+\beta-\alpha^2}\mathrm{d}t \\
&\underbrace{=}_{s=t+\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2+\beta-\alpha^2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left[\arctan\left(\frac{s}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}.
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 7. **1.** On a $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t-1} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge donc par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t \underset{x\to0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln x.$$

2. On a $\dfrac{1}{t^3+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge donc par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2x^2}.$$

3. On a $\dfrac{\arctan t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge donc par intégration des relations de comparaison

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\pi}{2t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln x.$$

4. $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et $t^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par une intégration par parties

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ converge. Par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right).$$

D'où $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Corrigé de l'exercice 8. **1.** La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ répont à la question.

2. On considère la fonction f, définie, continue et affine par morceaux sur $[1,+\infty[$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f\left(n-\frac{1}{2^n}\right) = f\left(n+\frac{1}{2^n}\right) = 0,\ f(n) = n \text{ et nulle ailleur.}$$

On a $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{3k+1}{2^{k+2}}$ donc

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+1}{2^{k+2}} \in \mathbb{R}.$$

Donc f intégrable sur $[1,+\infty[$ mais $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et f n'a pas de limite nulle en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 9. **1.** $f : t \longmapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est définie et cpm sur $]0,+\infty[$ et

- au voisinage de 0^+ :

$$f(t) \underset{0}{=} \frac{1 - at - 1 + bt + o(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} b - a.$$

  Donc f est prolongeable par continuité en 0.
- au voisinage de $+\infty$: $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc f intégrable au voisinage de $+\infty$.

D'où l'existence de l'intégrale I.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-at}}{t}$ est intégrable sur $[\varepsilon,+\infty[$ donc on peut écrire :

$$I = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t \underset{at=s,\ bt=s}{=} \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}\mathrm{d}s - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s}\mathrm{d}s = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-s}}{s}\mathrm{d}s.$$

3. On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t} \underset{0}{=} \dfrac{-t + o(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} -1$ donc f est prolongeable par continuité en 0. Notons encore f le prolongement de f obtenu en posant $f(0) = -1$, qui est donc continu sur $\mathbb{R}$. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. On a

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\mathrm{d}t = F(b\varepsilon) - F(a\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} F(0) - F(0) = 0.$$

Car F est continue en 0. Donc

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-t} - 1}{t}\mathrm{d}t}_{=0} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

D'où $I = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t \underset{\ln t = s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\mathrm{d}t = \ln 2.$

Corrigé de l'exercice 10. **1.** $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et

$$F(x) = \int_2^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-\beta}(\ln t)^{1-\beta}\right]_2^x & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \left[\ln(\ln t)\right]_2^x & \text{si} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}\left((\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right) & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) & \text{si} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

donc $F(x)$ admet une limite finie ssi $\beta > 1$.
D'où l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$.

On peut aussi utiliser le changement de variable $x = \ln t$. Ainsi $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\beta}$ converge ssi $\beta > 1$.

2. Supposons $\alpha < 1$. On a $tf(t) = \dfrac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, pour t assez grand, $f(t) \geq \dfrac{1}{t}$ donc $\dfrac{1}{t} \underset{+\infty}{=} O(f(t))$.

Comme $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

3. Supposons $\alpha > 1$. Soit $\alpha' \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \alpha' < \alpha$. On a

$$\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha'}} \underbrace{\frac{1}{t^{\alpha-\alpha'}(\ln t)^\beta}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha'}}\right).$$

Donc il suffit de prendre $\gamma = \alpha' = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$. Ainsi $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$.

Comme $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\gamma}$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge.

4. D'après ce qui précède

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \text{ converge } \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}.$$

5. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ est cpm sur $]0, 1/2]$. Par le changement de variable $s = \dfrac{1}{t}$, on a

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{s^\alpha}{|\ln(1/s)|^\beta}\frac{1}{s^2}\mathrm{d}s = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s^{2-\alpha}|\ln s|^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s^{2-\alpha}(\ln s)^\beta}.$$

donc $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge ssi $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s^{2-\alpha}(\ln s)^\beta}$ converge. D'où

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta} \text{ converge ssi } (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

Corrigé de l'exercice 11. **1.** $f : t \longmapsto \ln(\sin t)$ est cpm sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et

$$\sqrt{t}f(t) = \sqrt{t}\ln\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \sqrt{t}\left(\ln t + \ln\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)\right) = \sqrt{t}\left(\ln t - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, on a $I = J$ donc l'intégrale définissant J converge aussi.

2. On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) + \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{2}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,\mathrm{d}t &\underset{s=2t}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s \\ &\underset{s=t+\pi/2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(I+J).\end{aligned}$$

Donc $I + J = \dfrac{1}{2}(I+J) - \dfrac{\pi\ln 2}{2}$. D'où $I = J = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

3. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t}\mathrm{d}t &\underset{u=\pi/2-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan u\,\mathrm{d}u \\ &= \left[-\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos u)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Or $\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos u) \underset{h=\pi/2-u}{=} h\ln(\sin h) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$. D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t}\mathrm{d}t = -J = \frac{\pi\ln 2}{2}$.

Corrigé de l'exercice 12. **1.** Soit $a > 0$.

$$\begin{aligned}I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2}\mathrm{d}t \\ &\underset{u=a/t}{=} \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a - \ln u}{1 + u^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \frac{1}{a}I(1) \\ &= \frac{\pi\ln a}{2a} - \frac{I(1)}{a}\end{aligned}$$

Pour $a = 1$ on obtient $I(1) = 0$. D'où $I(a) = \dfrac{\pi\ln a}{2a}$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} \\ &\underset{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^2)(1+u^a)}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Donc $2I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. D'où $I(a) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Soit $a < b$.

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \\ &\underset{u=(a+b)/2-t}{=} \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{((b-a)/2-u)\left((b-a)/2+u\right)}} \\ &\underset{s=2u/(b-a)}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= [\arcsin s]_{-1}^{1} = \pi. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 13. **1.** Par une intégration par parties on a :

$$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

- La fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue par moreaux sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 car $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge.
- La fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. De plus, $\dfrac{\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

D'où l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

2. Pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\right) && \text{relation de Chasles} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+(k-1)\pi}\mathrm{d}t\right) && t \longmapsto |\sin t| \text{ est } \pi-\text{périodique} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi} \sin t\mathrm{d}t\right) && t+(k-1)\pi \leq k\pi \text{ pour } t \in [0,\pi] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k\pi}[-\cos t]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty && \text{somme partielle de la série harmonique} \end{aligned}$$

D'où l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument.

Corrigé de l'exercice 14. Par une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{+\infty} t^{n+2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\underbrace{\left[t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{n+1}{2}\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n+1}{2}I_n. \end{aligned}$$

Ainsi $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}I_n$. Notons que $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

- Si $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ alors $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2}I_{2p-2}$ donc

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots\times 1}{2\times 2\times\dots\times 2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi}.$$

- Si $n = 2p+1$ alors $I_{2p+1} = pI_{2p-1}$ donc

$$I_{2p+1} = p\times(p-1)\dots\times 1\times I_1 = \frac{p!}{2}.\ (I_1 = \frac{1}{2})$$