Intégrales généralisées (rappel MPSI)

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I, J des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.

1 Intégrales généralisées

Intégration sur $[a, b[$

Soit a un réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < b$.

Définition 1.1. **intégration sur $[a, b[$**

On dit que l'intégrale d'une fonction $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ cpm ***converge*** si ***l'intégrale partielle*** $I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ définie pour $x \in [a, b[$ admet une limite finie quand $x \to b^-$. Dans ce cas, $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$.

Sinon, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ ***diverge***.

Théorème 1.1. **cas des fonctions continues**

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue de primitive F. L'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $F(x)$ admet une limite finie quand $x \to b^-$. Dans ce cas, $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b}$.

Théorème 1.2. **linéarité**

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ cpm et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} g(t)\mathrm{d}t$ convergent, alors $\displaystyle\int_{[a,b[} \big(f(t) + \lambda.g(t)\big)\mathrm{d}t$ converge aussi. De plus $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b[} \big(f(t) + \lambda.g(t)\big)\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_{[a,b[} g(t)\mathrm{d}t}$.

Théorème 1.3. **cas complexe**

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ cpm.

1. Si $\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_{[a,b[} \overline{f(t)}\mathrm{d}t$ converge aussi et $\boxed{\int_{[a,b[} \overline{f(t)}\mathrm{d}t = \overline{\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t}}$.

2. $\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\int_{[a,b[} \mathrm{Re} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{[a,b[} \mathrm{Im} f(t)\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas,

$$\boxed{\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} \mathrm{Re}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{[a,b[} \mathrm{Im}\left(f(t)\right)\mathrm{d}t}.$$

Proposition 1.1. **croissance**

Soient f et $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cpm telles que $\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{[a,b[} g(t)\mathrm{d}t$ convergent.

1. $f \leq g \Longrightarrow \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t \leq \int_{[a,b[} g(t)\mathrm{d}t$.

2. $f \geq 0 \Longrightarrow \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.

Proposition 1.2. **stricte positivité**

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive telle que $\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ converge. $\boxed{\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f \text{ nulle sur } [a, b[}$.

Intégration sur $]a, b]$ ou sur $]a, b[$

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 1.2. **intégration sur $]a, b]$**

On dit que l'intégrale d'une fonction $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm ***converge*** si ***l'intégrale partielle*** $I(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ définie pour $x \in]a, b]$ admet une limite finie quand $x \to a^+$. Dans ce cas, $\boxed{\int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Définition 1.3. **intégration sur $]a, b[$**

On dit que l'intégrale d'une fonction $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ cpm ***converge*** si, pour tout réel c dans $]a, b[$, les intégrales $\int_{]a,c]} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{[c,b[} f(t)\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, $\boxed{\int_{]a,b[} f(t)\mathrm{d}t \overset{\text{déf}}{=} \int_{]a,c]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[c,b[} f(t)\mathrm{d}t}$.

Remarque 1.1. ■ Les résultats précédemment énoncés pour les intégrales sur $[a, b[$ se transposent aux intégrales sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

Proposition 1.3. **intégration entre deux bornes finies**

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm. Les intégrales $\int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}t$, $\int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{]a,b[} f(t)\mathrm{d}t$ convergent. De plus

$$\boxed{\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\mathrm{d}t}.$$

Remarque 1.2 (Erreur fréquente).

■ Si $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est cpm telle que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ***n'est pas forcément*** convergente.

Définition 1.4.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm telle que $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Si $a \leq b$ désignent les extrémités de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t}$ et $\boxed{\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_I f(t)\mathrm{d}t}$.

Théorème 1.4. **relation de Chasles**

Soit $f : I \longmapsto \mathbb{K}$ cpm. Si $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge alors, pour tous a, b, c points de I ou extrémités éventuelement infinies de I, les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent et $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t}$.

Intégrales de référence

Proposition 1.4. **fonction exponentielle**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge $\iff \lambda > 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge $\iff \mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Théorème 1.5. **intégrales de Riemann**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

Remarque 1.3. ■ $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2 Intégrabilité

Les résultats qui suivent sont présentés pour l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a,b[$. Il peuvent aisément se transposer aux intégrales sur $]a,b]$ ou sur $]a,b[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Théorème 2.1. **intégrale d'une fonction positive**

Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cpm et ***positive***. $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [a,b[\,,\ \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq M}$.

En revanche, si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = +\infty$.

Théorème 2.2. **comparaison**

Soit $f, g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ cpm et ***positives***.

1. $\begin{cases} f \leq g \\ \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge

2. $\begin{cases} f \underset{b^-}{=} O(g) \\ \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge

3. $\begin{cases} f \underset{b^-}{=} o(g) \\ \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \end{cases} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge

4. $f \underset{b^-}{\sim} g \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarque 2.1. ■ Si $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est cpm et $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Proposition 2.1. **comparaison aux intégrales de Riemann**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ cpm et ***positive***.

a. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. S'il existe $\alpha \leq 1$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ cpm et ***positive***.

a. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} 0$, alors $\displaystyle\int_0^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

b. S'il existe $\alpha \geq 1$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} \ell$, alors $\displaystyle\int_0^{a} f(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Théorème 2.3. **comparaison série-intégrale**

Soit f une fonction cpm, ***positive et décroissante*** sur $[n_0, +\infty[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \iff \sum_{n\geq n_0} f(n) \text{ converge.}$$

Définition 2.1. **fonction intégrable**

On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm est ***intégrable*** ou l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ ***converge absolument*** lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 2.4. **fonction intégrable vs convergence de son intégrale**

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est cpm et intégrable sur I alors[1] l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\left|\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_I |f(t)|\mathrm{d}t}$.

1. La réciproque est fausse.

Théorème 2.5. **domination**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ cpm. $\boxed{\forall t \in I,\ \ |f(t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ intégrable sur } I \implies f \text{ intégrable sur } I}$.

Théorème 2.6. **inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ cpm de ***carrés intégrables*** i.e. f^2 et g^2 sont intégrables.

$$\left|\int_I |f(t)\overline{g}(t)|\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_I |f(t)|^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I |\overline{g}(t)|^2\mathrm{d}t}.$$

Théorème 2.7. **intégration des relations de comparaison**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$, $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions cpm.

1. On suppose g ***positive*** et intégrable sur $[a, b[$.

a. $f \underset{b^-}{=} O(g) \implies f$ intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b^-}{=} O\left(\int_x^b g\right)$.

b. $f \underset{b^-}{=} o(g) \implies f$ intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_x^b g\right)$.

c. $f \underset{b^-}{\sim} g \implies f$ intégrable sur $[a, b[$ et $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g$.

2. On suppose g ***positive*** et non intégrable sur $[a, b[$.

a. $f \underset{b^-}{=} O(g) \implies \displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b^-}{=} O\left(\int_a^x g\right)$.

b. $f \underset{b^-}{=} o(g) \implies \displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_a^x g\right)$.

c. $f \underset{b^-}{\sim} g \implies \displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g$.

3 Calcul d'intégrales généralisées

Théorème 3.1. **changement de variable généralisé**

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue et $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } \int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Dans ce cas, $\boxed{\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\mathrm{d}t}$.

Remarque 3.1. ■ f intégrable sur I si, et seulement si, $f \circ \varphi \times |\varphi'|$ intégrable sur J.

Théorème 3.2. **intégration par parties généralisée**

Soit $u, v : I \longrightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que le produit uv admet admet une limite finie en les extrémités ouvertes a et b de I, avec $a < b$ et $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

$$\int_I u'(t)v(t)\mathrm{d}t \text{ converge si, et seulement si, } \int_I u(t)v'(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Dans ce cas, $\boxed{\int_I u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_I u(t)v'(t)\mathrm{d}t}$.

4 Une sélection d'exercices

Exercice 4.1 : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^4+1}\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(t+1)}\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\mathrm{d}t$.
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.
11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{e^t-1}\mathrm{d}t$.
12. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$.
13. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$.
14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.
15. $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\mathrm{d}t$.
16. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\ln(t+1)}\mathrm{d}t$.
17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t$.
18. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$.
19. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t$.
20. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3-1}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.2 : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\mathrm{d}t, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\tanh t}{t^\alpha}\mathrm{d}t, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.3 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.4 : `Calcul à l'aide d'une récurrence.`

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $t \longmapsto |\ln t|^n$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^n\mathrm{d}t$.
3. Montrer que, pour tout $p > -1$ et $q \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto t^p(\ln t)^q$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 t^p(\ln t)^q\mathrm{d}t$.

Exercice 4.5 : `D'après centrale PC.` On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.

Exercice 4.6 : **1.** Soit $\alpha > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer après avoir vérifié leur convergence : $C(\alpha,\omega) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ et $S(\alpha,\omega) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

2. Soit p et q deux réels tels que $p^2 < q$. Calculer après avoir vérifié la convergence : $I(p,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2pt+q}\mathrm{d}t$.

Exercice 4.7 : Donner un équivalent simple de

1. $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}$, $x \to 0^+$. **2.** $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$, $x \to +\infty$. **3.** $\int_1^x \frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$, $x \to +\infty$. **4.** $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$, $x \to +\infty$.

Exercice 4.8 : `Deux contres exemples afin d'éviter toute confusion.`

1. Donner un exemple d'une fonction continue, positive et de limite nulle en $+\infty$ mais n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. **Indication :** penser à la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$.

2. Donner un exemple d'une fonction cpm, positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ mais n'a pas de limite nulle en $+\infty$. **Indication :** considérons une fonction affine par morceaux sur les intervalles $\left[n-\frac{1}{2^n}, n\right]$ et $\left[n, n+\frac{1}{2^n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et nulle ailleur.

Exercice 4.9 : Soit a et b deux réels > 0.

1. Démontrer l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$.

2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

3. Démontrer que la fonction $t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0. En déduire la valeur de I.

4. Exemple : Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$. **Indication :** utiliser un changement de variable.

Exercice 4.10 : `Intégrales de Bertrand.` Soit α et β deux réels. Pour tout $t \geq 2$, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$.

1. Supposons $\alpha = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

2. Supposons $\alpha < 1$. Montrer $\frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} O(f(t))$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

3. Supposons $\alpha > 1$. Chercher un réel $\gamma > 1$ tel que $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

4. En déduire $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

5. En déduire $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge $\iff$ $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$. **Indication :** utiliser un changement de variable.

Exercice 4.11 : `Intégrales d'Euler.` On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

2. En étudiant $I + J$, calculer I et J.

3. Exemple : Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t}\mathrm{d}t$. **Indication :** utiliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

Exercice 4.12 : Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1. $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$, $a > 0$. **2.** $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}$, $a \in \mathbb{R}$. **3.** $I(a,b) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$, $a < b$.

Exercice 4.13 : `Intégrale de Dirichlet : une intégrale convergente mais ne converge pas absolument.`

1. Soit $x > 1$. Montrer $\int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ ne converge pas absolument.

Exercice 4.14 : Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. **Indication :** on donne $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.