Chapitre 7

Séries entières

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

Plan

Séries entières, rayon de convergence

- Pour tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose
$$D(0,r) = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad |z| < r\right\}.$$
- Si $0 < r < +\infty$, $D(0,r)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon r.
- Par abus de language, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

Définition 1.1 (série entière, domaine de convergence, somme).

1. On appelle ***série entière*** définie par une suite de coefficients complexes $(a_n)_n$, la série de fonctions $\sum u_n$ avec
$$u_n : z \in \mathbb{C} \longmapsto a_n z^n.$$
Par abus, cette série de fonctions est simplement notée $\sum a_n z^n$.

2. L'ensemble
$$\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C},\ \text{ tel que la série numérique } \sum a_n z^n \text{ converge } \right\}$$
est appelé le ***domaine de convergence*** de la série entière $\sum a_n z^n$.

3. La ***somme*** S de la série entière $\sum a_n z^n$ est définie sur $\mathcal{D}$ par
$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

1. La série entière $\sum z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$
2. La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et par définition
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \mathrm{e}^z.$$
3. $\sum \frac{1}{n+1} z^{2n}$ est une série entière avec
$$a_{2n} = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.1 (lemme d'Abel).

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *non nul. Si la suite* $\left(a_n z_0^n\right)_n$ *est bornée alors pour tout* $z \in D\big(0, |z_0|\big)$*, la série numérique* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*

Définition 1.2 (rayon de convergence).

On appelle ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum a_n z^n$, le nombre

$$\boxed{R \overset{\text{déf}}{=} \sup\left\{r \geq 0,\ \ \left(a_n r^n\right)_n \ \text{ bornée }\right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}}.$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Pour la série entière $\sum \alpha^n z^n$, on a :

$$\left\{ r \geq 0,\ \ (\alpha^n r^n)_n \text{ bornée } \right\} = \left[0, \frac{1}{|\alpha|} \right],$$

donc $R = \dfrac{1}{|\alpha|}$.

2. Pour la série entière $\sum \dfrac{1}{n!} z^n$, on a :

$$\left\{ r \geq 0,\ \ \left(\frac{1}{n!} r^n \right)_n \text{ bornée } \right\} = \mathbb{R}^+,$$

donc $R = +\infty$.

3. Pour la série entière $\sum n! z^n$, on a :

$$\left\{ r \geq 0,\ \ (n! r^n)_n \text{ bornée } \right\} = \{0\},$$

donc $R = 0$.

Autres définitions du rayon de convergence
Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

$$\begin{aligned} R &= \sup\left\{r \geq 0,\ \ \sum a_n r^n \text{ converge}\right\} \\ &= \sup\left\{r \geq 0,\ \ \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\right\} \\ &= \sup\left\{r \geq 0,\ \ a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}. \end{aligned}$$

Convergence simple

Théorème 1.2 (caractérisation du rayon de convergence).

Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ *est* ***l'unique*** $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} |z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge (absolument)} \\ \text{et} \\ |z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge (grossièrement)} \end{cases}$$

Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$. On a :

- Si $|z| < 1$, alors $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument car
$$\frac{z^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
- Si $|z| > 1$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ diverge grossièrement car
$$\frac{|z|^n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$ égale à 1.

Corollaire 1.1 (domaine de convergence).

Soit $\mathcal{D}$ *le domaine de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* R.

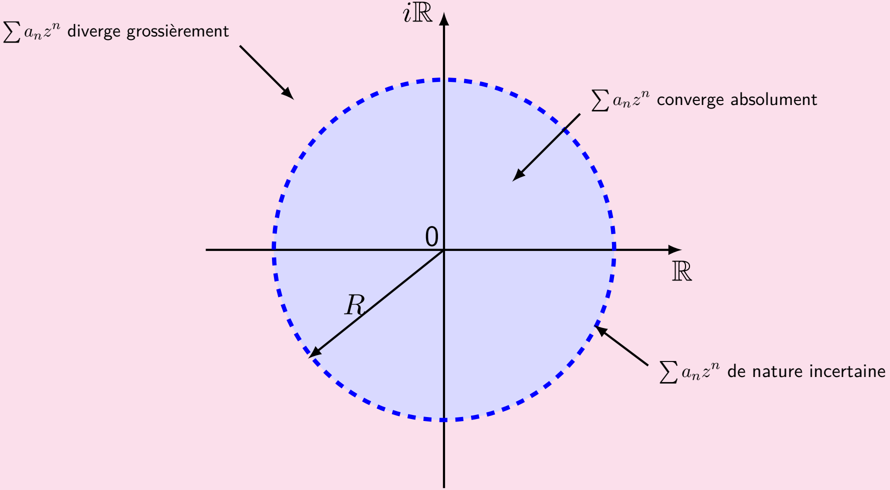
1. *Si* $R = 0$, *alors* $\mathcal{D} = \{0\}$.
2. *Si* $R = +\infty$, *alors* $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
3. *Si* $R > 0$, *alors* $D(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0,R)}$.

Sur le cercle de centre 0 *et de rayon* R, *les natures de* $\sum a_n z^n$ *peuvent être diverses.*

1. La série entière $\sum \frac{z^n}{2^n}$ converge si, et seulement si, $|z| < 2$. Son rayon de convergence est 2 et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 2$, la série diverge, donc $\mathcal{D} = D(0,2)$.
2. La série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est de rayon de convergence 1 et converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, donc $\mathcal{D} = \overline{D(0,1)}$.

Définition 1.3 (disque ouvert de convergence).

Si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, alors le disque $D(0,R)$ est appelé ***disque ouvert de convergence*** de $\sum a_n z^n$.


$\sum a_n z^n$ diverge grossièrement
$i\mathbb{R}$
$\sum a_n z^n$ converge absolument
0
$\mathbb{R}$
R
$\sum a_n z^n$ de nature incertaine

Convergence normale

Théorème 1.3 (convergence normale sur tout compact).

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, et donc uniformément, sur[1] *tout compact $K \subset D(0,R)$.*

[1] On n'a pas la convergence normale sur $D(0,R)$ tout entier : la série $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1 et $\sup_{z \in D(0,1)} |z^n| = 1$.

Corollaire 1.2 (continuité de la somme d'une série entière).

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Plan

Calcul à partir d'un encadrement

Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. S'il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|z| < \alpha \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$
alors $R \geq \alpha$.
2. S'il existe $\beta \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|z| > \beta \implies \sum a_n z^n \text{ diverge}$$
alors $R \leq \beta$.

Règle de d'Alembert

Théorème 2.1 (règle de d'Alembert).

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes ***non nulle*** *à partir d'un certain rang telle que :*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est :

$$\boxed{R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si} \quad \ell \in \left]0,+\infty\right[\\ +\infty & \text{si} \quad \ell = 0 \\ 0 & \text{si} \quad \ell = +\infty \end{cases}}$$

😊

Rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$. On a $a_n \neq 0$ et

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.$$

donc $R = \mathrm{e}$.

Un cas particulier de la règle de d'Alembert

Rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} z^{3n}$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(z) = \binom{2n}{n} z^{3n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{3n}.$$

Pour $z = 0$, la série $\sum u_n(z)$ converge et pour $z \neq 0$ on a

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left| \frac{z^{3(n+1)}}{z^{3n}} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4|z|^3.$$

- Si $|z| < \sqrt[3]{1/4}$ alors $\sum u_n(z)$ converge absolument.
- Si $|z| > \sqrt[3]{1/4}$ alors $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement.

On en déduit $R = \sqrt[3]{1/4}$.

Comparaison des rayons de convergence

Théorème 2.2 (comparaison des rayons de convergence).

Soit R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

1. $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n) \implies R_a \geq R_b$.
2. $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \implies R_a = R_b$.

Théorème 2.3.

Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

! Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Plan

Combinaison linéaire

Théorème 3.1 (multiplication par un scalaire).

Soient R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si R est le rayon de convergence de $\sum \lambda a_n z^n$ alors

1. $R = R_a$ *si* $\lambda \neq 0$ *et* $R = +\infty$ *si* $\lambda = 0$.
2. *Pour tout* z *tel que* $|z| < R$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}.$$

Théorème 3.2 (somme).

Soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
On note R le rayon de convergence de la série ***somme*** *$\sum (a_n + b_n) z^n$.*
On a :

1. $R \geq \min(R_a, R_b)$.
2. *Pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,*
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n}.$$
3. *Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.*

Produit de Cauchy de séries entières

Définition 3.1 (produit de Cauchy).

On appelle ***produit de Cauchy*** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ avec

$$\boxed{c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}.$$

Théorème 3.3.

Soient R_a *et* R_b *les rayons de convergence respectifs de* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$.
On note R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum c_n z^n$.
On a :

1. $R \geq \min(R_a, R_b)$.
2. *Pour tout* z *tel que* $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)}.$$

Plan

Convergence

Désormais, nous étudions les séries entières de la variable réelle, i.e. de la forme $\sum a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.1.

Si $\sum a_n x^n$ *est de rayon de convergence* $R > 0$ *alors*

1. $|x| < R \implies \sum a_n x^n$ *converge absolument.*
2. $|x| > R \implies \sum a_n x^n$ *diverge grossièrement.*

L'ensemble

$$\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R},\ \text{ tel que la série numérique } \sum a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

vérifie : $]-R, R[\subset \mathcal{D} \subset [-R, R]$.

Définition 4.1 (intervalle ouvert de convergence).

L'intervalle $]-R, R[$ est appelé ***intervalle ouvert de convergence*** de la série $\sum a_n x^n$.

Théorème 4.2 (convergence normale sur tout compact).

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, et donc uniformément, sur tout compact $K \subset]-R, R[$. En particulier, sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$.

Corollaire 4.1 (continuité de la somme d'une série entière).

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son intervalle ouvert de convergence.

Intégration

Définition 4.2 (série entière primitive).

On appelle ***série entière primitive*** de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Proposition 4.1.

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Théorème 4.3 (intégration d'une série entière).

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sa somme.*

1. *Pour tout segment* $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n t^n \mathrm{d}t\right)}.$$

2. *Une primitive sur* $]-R, R[$ *de* f *est*

$$\boxed{\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \text{ pour tout } x \in]-R, R[}.$$

1. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série géométrique).

Par intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

2. Pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ (série géométrique). Par intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Dérivation

Définition 4.3 (série entière dérivée).

On appelle ***série entière dérivée*** de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Proposition 4.2.

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Théorème 4.4 (dérivation d'une série entière).

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et* $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sa somme.*

1. f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et*

$$\boxed{\begin{aligned}\forall x \in \left]-R, R\right[, \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} k!\binom{n+k}{k} a_{n+k} x^n\end{aligned}}.$$

2. $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}.$$

Corollaire 4.2 (unicité des coefficients d'une série entière).

Soient $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence strictement positif.*

$$\boxed{\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \left]-\alpha, \alpha\right[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = b_n}.$$

$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

- f est paire si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N},\ \ a_{2p+1} = 0$.
- f est impaire si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N},\ \ a_{2p} = 0$.

Plan

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$.

Définition 5.1 (fonction développable en série entière).

1. On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***développable en série entière*** (***DSE***) sur $]-r, r[\subset I$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que[1]

$$\boxed{\forall x \in \,]-r, r[\,, \quad \sum a_n x^n \text{ converge} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}.$$

2. On dit que $f : D(0, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***DSE*** (en 0), s'il existe $0 < \alpha \leq r$ et une série entière $\sum a_n z^n$ telle que

$$\boxed{\forall z \in D(0, \alpha), \quad \sum a_n z^n \text{ converge} \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}.$$

[1] Cette série entière est nécessairement de rayon de convergence $R \geq r$.

1. $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$ est DSE sur $D(0,1)$.
2. $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ est DSE sur $\mathbb{C}$
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ où $a \in \mathbb{C}$ est DSE sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} x^n$, donc les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont DSE sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

et

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, donc les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ sont DSE sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

et

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Proposition 5.1 (DSE d'une primitive).

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *est DSE sur* $]-r, r[$ *avec* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *alors les primitives* F *de* f *le sont aussi avec*

$$\boxed{F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \text{ pour tout } x \in]-r, r[}.$$

Série de Taylor

Définition 5.2 (série de Taylor).

On appelle ***série de Taylor*** (en 0) d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème 5.1 (régularité d'une fonction DSE).

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE sur $]-r, r[$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors[1] f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}.$$

[1] Attention la réciproque est fausse : une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas nécessairement DSE.

Développement du binôme $(1+x)^\alpha$

Théorème 5.2 (développement du binôme $(1+x)^\alpha$).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \end{aligned}}.$$

La fonction $x \longmapsto \arcsin x$ est dérivable sur $]-1,1[$ et $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Or pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)}^{n \text{ termes}}}{n!}\left(-x^2\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\dots\times\frac{2n-1}{2}}{n!}x^{2n}.$$

Mais,

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2}}{n!}$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{2^n \big(2 \times 4 \times \ldots \times (2n)\big) n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Ainsi, $x \longmapsto \arcsin x$ est DSE sur $]-1, 1[$ et par intégration terme à terme on a :

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad \arcsin x = \int_0^x \left(\arcsin t\right)' \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}.$$

Calcul de développements en série entière en exploitant une équation différentielle

Développement en série entière de $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \longmapsto \arcsin x$ sont DSE sur $]-1,1[$ donc f l'est aussi par produit. De plus, f est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$
- f vérifie l'EDL1 :
$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$
Or f étant impaire, son DSE sur $]-1,1[$ peut s'écrire
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

- Par dérivation de série entière sur $]-1,1[$, on a
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}.$$
La relation $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ donne alors
$$a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \big((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n\big)x^{2n+2} = 1.$$
- Par unicité des coefficients d'un développement en série entière :
$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n.$$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

Finalement, pour tout $x \in]-1,1[$, $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Développement en série entière de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

- Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ sont DSE sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ l'est aussi comme primitive d'une fonction DSE. Enfin f l'est également comme produit de deux fonctions DSE.
- f vérifie l'EDL1 :

$$y' + 2xy = 1.$$

Or f étant impaire, son DSE sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

- Par dérivation de série entière sur $\mathbb{R}$, on a
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}.$$
La relation $f'(x) + 2x f(x) = 1$ donne alors
$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((2n+1)a_n + 2a_{n-1}\big) x^{2n} = 1.$$
- Par unicité des coefficients d'un développement en série entière :
$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1,\ \ a_n = \frac{-2}{2n+1} a_{n-1}.$$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = (-1)^n \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Développements en séries entières des fonctions usuelles	
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$	$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} x^n$ sur $]-1,1[$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$ sur $\mathbb{R}$	$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ sur $\mathbb{R}$
$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$	$\cosh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} x^{2n}$ sur $\mathbb{R}$
$\sinh x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$	$(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ sur $]-1,1[$

Merci pour votre attention!