Séries entières

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

1 Convergence des séries entières **1**

2 Calcul du rayon de convergence **3**

3 Opérations sur les séries entières **4**

4 Série entière d'une variable réelle **5**

5 Développement d'une fonction en série entière **6**

Pour tout $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on pose $D(0,r) = \left\{z \in \mathbb{C}, \quad |z| < r\right\}$. Si $0 < r < +\infty$, $D(0,r)$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon r. Par abus de language, on dira que $\mathbb{C}$ est le disque ouvert de rayon $+\infty$.

1 Convergence des séries entières

Séries entières, rayon de convergence

Définition 1.1. **série entière, domaine de convergence, somme**

1. On appelle ***série entière*** définie par une suite de coefficients complexes $(a_n)_n$, la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n : z \in \mathbb{C} \longmapsto a_n z^n$. Par abus, cette série de fonctions est simplement notée $\sum a_n z^n$.
2. L'ensemble $\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} \left\{z \in \mathbb{C}, \text{ tel que la série numérique } \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$ est appelé le ***domaine de convergence*** de la série entière $\sum a_n z^n$.
3. La ***somme*** S de la série entière $\sum a_n z^n$ est définie sur $\mathcal{D}$ par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Exemple 1.1. ■ La série entière $\sum z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

■ La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et par définition $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \mathrm{e}^z$.

■ $\sum \frac{1}{n+1} z^{2n}$ est une série entière avec $a_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.1. **lemme d'Abel**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ non nul. Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_n$ est bornée alors pour tout $z \in D\big(0, |z_0|\big)$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 1.2. **rayon de convergence**

On appelle ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum a_n z^n$, le nombre

$$\boxed{R \overset{\text{déf}}{=} \sup\left\{r \geq 0,\ \left(a_n r^n\right)_n \text{ bornée}\right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}}.$$

Exemple 1.2. ■ Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Pour la série entière $\sum \alpha^n z^n$: $\left\{r \geq 0,\ (\alpha^n r^n)_n \text{ bornée}\right\} = \left[0, \dfrac{1}{|\alpha|}\right]$, donc $R = \dfrac{1}{|\alpha|}$.

■ Pour la série entière $\sum \dfrac{1}{n!} z^n$: $\left\{r \geq 0,\ \left(\dfrac{1}{n!} r^n\right)_n \text{ bornée}\right\} = \mathbb{R}^+$, donc $R = +\infty$.

■ Pour la série entière $\sum n! z^n$: $\left\{r \geq 0,\ (n! r^n)_n \text{ bornée}\right\} = \{0\}$, donc $R = 0$.

Remarque 1.1 (Autres définitions du rayon de convergence).

■ Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$:

$$\boxed{R = \sup\left\{r \geq 0,\ \sum a_n r^n \text{ converge}\right\} = \sup\left\{r \geq 0,\ \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\right\} = \sup\left\{r \geq 0,\ a_n r^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right\}}.$$

Convergence simple

Théorème 1.2. **caractérisation du rayon de convergence**

Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est ***l'unique*** $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R & \Longrightarrow \quad \sum a_n z^n \text{ converge (absolument)} \\ \text{et} & \\ |z| > R & \Longrightarrow \quad \sum a_n z^n \text{ diverge (grossièrement)} \end{cases}}$$

Exemple 1.3. ■ Rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$. On a :

- Si $|z| < 1$, alors $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ converge absolument car $\dfrac{z^n}{n^2} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- Si $|z| > 1$, $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ diverge grossièrement car $\dfrac{|z|^n}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Ainsi, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ égale à 1.

Corollaire 1.1. **domaine de convergence**

Soit $\mathcal{D}$ le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R.

1. Si $R = 0$, alors $\mathcal{D} = \{0\}$.
2. Si $R = +\infty$, alors $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
3. Si $R > 0$, alors $D(0, R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{D(0, R)}$.

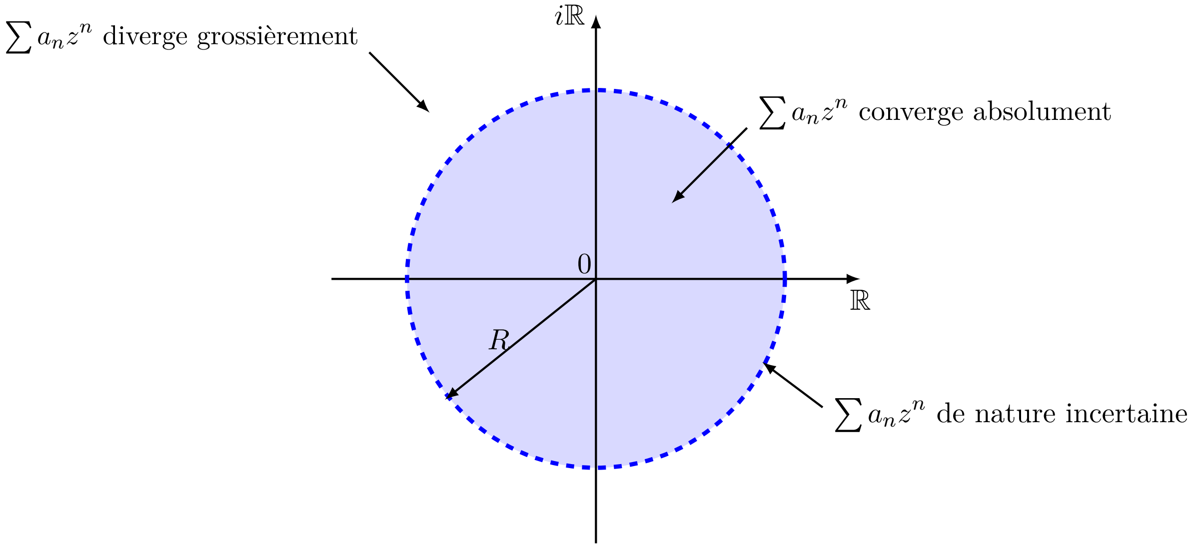
Sur le cercle de centre 0 et de rayon R, les natures de $\sum a_n z^n$ peuvent être diverses.

Exemple 1.4. ■ La série entière $\sum \dfrac{z^n}{2^n}$ converge si, et seulement si, $|z| < 2$. Son rayon de convergence est 2 et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 2$, la série diverge, donc $\mathcal{D} = D(0, 2)$.

■ La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ est de rayon de convergence 1 et converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, donc $\mathcal{D} = \overline{D(0, 1)}$.

Définition 1.3. **disque ouvert de convergence**

Si R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, alors le disque $D(0, R)$ est appelé ***disque ouvert de convergence*** de $\sum a_n z^n$.



Convergence normale

Théorème 1.3. **convergence normale sur tout compact**

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, et donc uniformément, sur [1] tout compact $K \subset D(0, R)$.

1. On n'a pas la convergence normale sur $D(0, R)$ tout entier : la série $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1 et $\sup\limits_{z \in D(0,1)} |z^n| = 1$.

Corollaire 1.2. **continuité de la somme d'une série entière**

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

2 Calcul du rayon de convergence

Remarque 2.1 (Calcul à partir d'un encadrement).

- Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
  - S'il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \alpha \implies \sum a_n z^n$ converge absolument alors $R \geq \alpha$.
  - S'il existe $\beta \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > \beta \implies \sum a_n z^n$ diverge alors $R \leq \beta$.

Règle de d'Alembert

Théorème 2.1. **règle de d'Alembert**

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe ***non nulle*** à partir d'un certain rang telle que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est : $\boxed{R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si} \quad \ell \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{si} \quad \ell = 0 \\ 0 & \text{si} \quad \ell = +\infty \end{cases}}$

Exemple 2.1. ■ Rayon de convergence de $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a $a_n \neq 0$ et $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$. Donc $R = \mathrm{e}$.

Exemple 2.2 (Un cas particulier de la règle de d'Alembert).

■ Rayon de convergence de $\sum \dbinom{2n}{n} z^{3n}$. Posons $u_n(z) = \dbinom{2n}{n} z^{3n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^{3n}$. Pour $z = 0$, la série $\sum u_n(z)$ converge et pour $z \neq 0$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left|\frac{z^{3(n+1)}}{z^{3n}}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4|z|^3.$$

- Si $|z| < \sqrt[3]{1/4}$ alors $\sum u_n(z)$ converge absolument.
- Si $|z| > \sqrt[3]{1/4}$ alors $\sum u_n(z)$ diverge grossièrement.

On en déduit $R = \sqrt[3]{1/4}$.

Comparaison des rayons de convergence

Théorème 2.2. **comparaison des rayons de convergence**

Soit R_a et R_b les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

1. $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(b_n) \implies R_a \geq R_b$.

2. $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \implies R_a = R_b$.

Théorème 2.3.

$\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Remarque 2.2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

3 Opérations sur les séries entières

Combinaison linéaire

Théorème 3.1. **multiplication par un scalaire**

Soient R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si R est le rayon de convergence de $\sum \lambda a_n z^n$ alors $R = R_a$ si $\lambda \neq 0$ et $R = +\infty$ si $\lambda = 0$. De plus, pour tout z tel que $|z| < R$, $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$.

Théorème 3.2. **somme**

Soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On note R le rayon de convergence de la série ***somme*** $\sum (a_n + b_n) z^n$. On a : $R \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité lorsque $R_a \neq R_b$.

De plus, pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n}$.

Produit de Cauchy de séries entières

Définition 3.1. **produit de Cauchy**

On appelle ***produit de Cauchy*** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ avec

$$\boxed{c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}.$$

Théorème 3.3.

Soient R_a et R_b les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. On note R le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$. On a : $R \geq \min(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)}$.

4 Série entière d'une variable réelle

Désormais, nous étudions les séries entières de la variable réelle, i.e. de la forme $\sum a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Convergence

Théorème 4.1.

Si $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ alors

1. $|x| < R \implies \sum a_n x^n$ converge absolument. **2.** $|x| > R \implies \sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

Remarque 4.1. $\mathcal{D} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R},\ \text{tel que la série numérique } \sum a_n x^n \text{ converge} \right\}$ vérifie : $]-R, R[\subset \mathcal{D} \subset [-R, R]$.

Définition 4.1. **intervalle ouvert de convergence**

L'intervalle $]-R, R[$ est appelé ***intervalle ouvert de convergence*** de la série $\sum a_n x^n$.

Théorème 4.2. **convergence normale sur tout compact**

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, et donc uniformément, sur tout compact $K \subset]-R, R[$. En particulier, sur tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$.

Corollaire 4.1. **continuité de la somme d'une série entière**

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son intervalle ouvert de convergence.

Intégration

Définition 4.2. **série entière primitive**

On appelle ***série entière primitive*** de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Proposition 4.1.

$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Théorème 4.3. **intégration d'une série entière**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

1. Pour tout segment $[a, b] \subset]-R, R[$, $\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n t^n \mathrm{d}t \right)}$.

2. Une primitive sur $]-R, R[$ de f est $\boxed{\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \text{ pour tout } x \in]-R, R[}$.

Exemple 4.1. ■ Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série géométrique). Par intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \ln(1-x) = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

■ Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ (série géométrique). Par intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \arctan(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Dérivation

Définition 4.3. **série entière dérivée**

On appelle ***série entière dérivée*** de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$.

Proposition 4.2.

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Théorème 4.4. **dérivation d'une série entière**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et $\boxed{\forall x \in]-R,R[\,, \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} k!\binom{n}{k} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} k!\binom{n+k}{k} a_{n+k} x^n}$.
2. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}$.

Corollaire 4.2. **unicité des coefficients d'une série entière**

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement positif.

$$\boxed{\exists \alpha > 0,\ \forall x \in]-\alpha, \alpha[\,,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = b_n}.$$

Remarque 4.2. ■ Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa somme.

- f est paire si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0$.
- f est impaire si, et seulement si, $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0$.

5 Développement d'une fonction en série entière

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$.

Fonctions développable en série entière

Définition 5.1. **fonction développable en série entière**

1. On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***développable en série entière*** (***DSE***) sur $]-r, r[\subset I$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que[1] $\boxed{\forall x \in]-r,r[\,,\quad \sum a_n x^n \text{ converge} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$.
2. On dit que $f : D(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***DSE*** (en 0), s'il existe $0 < \alpha \leq r$ et une série entière $\sum a_n z^n$ telle que

$$\boxed{\forall z \in D(0,\alpha),\ \sum a_n z^n \text{ converge} \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}.$$

1. Cette série entière est nécessairement de rayon de convergence $R \geq r$.

Exemple 5.1. ■ $z \longmapsto \dfrac{1}{1-z}$ est DSE sur $D(0,1)$.

■ $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ est DSE sur $\mathbb{C}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ où $a \in \mathbb{C}$ est DSE sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5.2. ■ $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{i}^n}{n!} x^n$, donc les fonctions cos et sin sont DSE sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$, donc les fonctions cosh et sinh sont DSE sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Proposition 5.1. **DSE d'une primitive**

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE sur $]-r, r[$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors les primitives F de f le sont aussi avec

$$\boxed{F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \text{ pour tout } x \in]-r, r[}.$$

Série de Taylor

Définition 5.2. **série de Taylor**

On appelle ***série de Taylor*** (en 0) d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème 5.1. **régularité d'une fonction DSE**

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE sur $]-r, r[$ avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors[1] f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}.$$

1. Attention la réciproque est fausse : une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas nécessairement DSE.

Développement du binôme $(1+x)^\alpha$

Théorème 5.2. **développement du binôme $(1+x)^\alpha$**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}.$$

Exemple 5.3. - La fonction $x \longmapsto \arcsin x$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Or

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)}^{n \text{ termes}}}{n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2}}{n!} x^{2n}.$$

Mais, $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2}}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{2^n \big(2 \times 4 \times \ldots \times (2n)\big) n!} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

Ainsi, $x \longmapsto \arcsin x$ est DSE sur $]-1, 1[$ et par intégration terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \arcsin x = \int_0^x \left(\arcsin t\right)' \mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}.$$

Calcul de développements en série entière en exploitant une équation différentielle

- Développement en série entière de $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.
  - Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \longmapsto \arcsin x$ sont DSE sur $]-1,1[$ donc f l'est aussi par produit. De plus, f est dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$.
  - f vérifie l'EDL1 : $(1-x^2)y' - xy = 1$. Or f étant impaire, son DSE sur $]-1,1[$ peut s'écrire $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.
  - Par dérivation de série entière sur $]-1,1[$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$. La relation $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ donne alors
  $$a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}\big((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n\big)x^{2n+2} = 1.$$
  - Par unicité des coefficients d'un développement en série entière : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}a_n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$. Finalement, pour tout $x \in]-1,1[\,,\ \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.
- Développement en série entière de $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
  - Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ sont DSE sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ l'est aussi comme primitive d'une fonction DSE. Enfin f l'est également comme produit de deux fonctions DSE.
  - f vérifie l'EDL1 : $y' + 2xy = 1$. Or f étant impaire, son DSE sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.
  - Par dérivation de série entière sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n}$. La relation $f'(x) + 2xf(x) = 1$ donne alors
  $$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big((2n+1)a_n + 2a_{n-1}\big)x^{2n} = 1.$$
  - Par unicité des coefficients d'un développement en série entière : $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1,\ \ a_n = \dfrac{-2}{2n+1}a_{n-1}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = (-1)^n\dfrac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

Développements en séries entières des fonctions usuelles	
$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$	$\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}x^n$ sur $]-1,1[$
$\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$ sur $\mathbb{R}$	$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ sur $\mathbb{R}$
$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$	$\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$ sur $\mathbb{R}$
$\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$	$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ sur $]-1,1[$