Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

Plan

Convergence simple

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et X une partie de E.

On désigne par $\left(f_n\right)_n$ une ***suite de fonctions*** de X vers F i.e. pour chaque n, f_n est une fonction de X vers F et f une fonction définie de X vers F.

Définition 1.1 (convergence simple (CS)).

On dit que $\left(f_n\right)_n$ ***converge simplement*** vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ si

$$\boxed{\forall x \in X, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}.$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ n \geq N \implies \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon}.$$

Dans ce cas, on dit[1] alors que f est la ***limite simple*** de $\left(f_n\right)_n$.

---

[1] Il y a unicité de la fonction vers laquelle une suite de fonctions peut converger simplement.

😊

$f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$ fixé. On a

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f$ sur $[0,1]$.

Convergence uniforme

Définition 1.2 (convergence uniforme (CU)).

On dit que $(f_n)_n$ ***converge uniformément*** vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CU}} f$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq N \implies \forall x \in X,\ \ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon}.$$

Dans ce cas, On dit alors que f est la ***limite uniforme*** de $(f_n)_n$.

Proposition 1.1 (CU vs CS).

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CU}} f \text{ sur } X \implies f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CS}} f \text{ sur } X.$$

Théorème 1.1 (condition nécessaire et suffisante de la CU).

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \textit{ sur } X \iff \begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \textit{ sur } X \\ \\ \sup\limits_{x\in X} \| f_n(x) - f(x) \|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{cases}$$

Convergence uniforme de $f_n(x) = \sqrt{n}x^n(1-x)$ sur $[0,1]$.

- Par croissances comparées, si $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}x^n = 0$ et $f_n(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc pour tout $x \in [0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Ainsi,
$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0 \text{ sur } [0,1].$$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$f_n'(x) = \sqrt{n}x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big).$$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	↗	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	↘	0

Donc

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| &= f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\\ &= \frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \frac{\sqrt{n}}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\\ &= \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,\mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,\mathrm{e}^{-1+o(1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

D'où $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur $[0,1]$.

Convergence en norme uniforme

On menu l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X,F)$ des fonctions bornées de X vers F par la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X,F), \quad \|f\|_{\infty,X} = \sup_{x\in X}\|f(x)\|_F.$$

Théorème 1.2 (caractérisation à l'aide de la norme de la convergence uniforme).

Soient $f \in \mathcal{B}(X,F)$ *et* $f_n \in \mathcal{B}(X,F)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

$$\boxed{f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \iff \|f_n - f\|_{\infty,X} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

Plan

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$.

Définition 2.1 (subdivision, fonction en escalier).

1. On appelle ***subdivision*** d'un segment $[a, b]$ toute suite réelle finie $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ avec
$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$
2. Une fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la restriction de φ à $]a_{i-1}, a_i[$ est constante[1].

[1] Une telle subdivision est alors dite ***adaptée*** à φ.

Théorème 2.1 (approximation par des fonctions en escalier).

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction continue par morceaux.*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}\ \text{ fonction en escalier telle que }\ \|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon}.$$

1. En d'autres termes, toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
2. L'espace des fonctions en escaliers de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ est une partie dense de l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par la norme de la convergence uniforme $\|.\|_{\infty,[a,b]}$.

Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Cas f constante.
  $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in [a,b],\ f(x) = \lambda$. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\lambda\left[\frac{\mathrm{e}^{inx}}{in}\right]_a^b\right| \\ &= |\lambda|\left|\frac{\mathrm{e}^{inb}-\mathrm{e}^{ina}}{in}\right| \\ &\leq \frac{2|\lambda|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

- Cas f en escalier.
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.
On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{j=1}^{p} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \underbrace{f_{|]a_{j-1},a_j[}(x)}_{\text{constant}=\lambda_j} \mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \left|\int_{a_{j-1}}^{a_j} \lambda_j\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \quad \text{(d'après le premier cas)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

- Cas f continue par morceaux.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ en escalier telle que :
$$\forall x \in [a,b]\,,\ \ |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$
D'après le deuxième cas,
$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$$n \geq N \Longrightarrow \left|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_a^b \big(f(x)-\varphi(x)\big)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \left|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par suite, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Théorème 2.2 (théorème de Weierstrass).

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction continue.*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \text{ fonction polynomiale telle que } \|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon}.$$

1. En d'autres termes, toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
2. L'espace des fonctions polynomiales de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ est une partie dense de l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par $\|.\|_{\infty,[a,b]}$.

Plan

Continuité par convergence uniforme

Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur X à valeurs dans F et f une fonction définie sur X vers F.

Théorème 3.1 (continuité locale).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est continue en } x_0 \in X \\ \\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CU}} f \text{ sur un voisinage de } x_0 \text{ dans } X \end{cases}$$

Alors

$$f \text{ est continue en } x_0.$$

Théorème 3.2 (continuité globale).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est continue sur } X \\ \\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur tout compact } \subset X \end{cases}$$

Alors

$$f \text{ est continue sur } X.$$

On remplace la CU sur tout compact par la CU sur tout segment[1] lorsque la variable est réelle.

[1] En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

😊 La suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ car la limite simple n'est pas continue sur $[0,1]$.

Théorème de la double limite

Théorème 3.3 (interversion des limites).

Soit $a \in \overline{X}$.

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_n \text{ (limite finie)} \\ \\ f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CU}} f \text{ sur un voisinage de } a \text{ dans } X \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la suite } (\ell_n)_n \text{ admet une limite finie} \\ \\ \lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right) \end{cases} .$$

Ce résultat peut être adapté en $a = \pm\infty$ *d'une fonction définie sur un intervalle réel non borné.*

Théorème 3.4.

Ici X est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in X$.

On suppose que les f_n sont continues sur X et que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathrm{CU}} f$ sur tout segment $\subset X$. Posons, pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors $\Phi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathrm{CU}} \Phi$ sur tout segment $\subset X$.

Corollaire 3.1 (interversion limite intégrale).

On suppose $X = [a,b]$.

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ \\ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CU}} f \text{ sur } [a,b] \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t \end{cases}.$$

Dérivation

Ici, le domaine de définition X est un intervalle réel I d'intérieur non vide.

Théorème 3.5 (caractère $\mathcal{C}^1$).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CS}} f \text{ sur } I \\ f_n' \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CU}} g \text{ sur tout segment } \subset I \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f' = g \\ \forall t \in I, \quad \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\right)' = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(t) \end{cases}.$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Théorème 3.6 (caractère $\mathcal{C}^p$).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \\ \forall k \in [\![0, p-1]\!], \quad \left(f_n^{(k)}\right)_n \text{ CS sur } I \\ \\ \left(f_n^{(p)}\right)_n \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la limite simple } f \text{ de } \left(f_n\right)_n \text{est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \\ \forall t \in I, \ \forall k \in [\![0, p]\!], \quad \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n^{(k)}(t) \end{cases}$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Corollaire 3.2 (caractère $\mathcal{C}^\infty$).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\[2ex] f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \text{ sur } I \\[2ex] \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \left(f_n^{(k)}\right)_n \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\[2ex] \forall t \in I,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(t) \end{cases}$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Plan

Convergence simple et convergence uniforme

On désigne par $\sum f_n$ une ***série de fonctions*** de X vers F i.e. pour chaque n, f_n est une fonction de X vers F.

On note, pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$: la ***somme partielle d'ordre*** n de la série $\sum f_n$.

Définition 4.1 (convergence simple et uniforme d'une série de fonctions).

1. On dit que $\sum f_n$ ***converge simplement*** sur X si, pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge i.e. la suite $\left(S_n\right)_n$ de ses sommes partielles converge simplement sur X. Dans le cas de convergence, on note :
   - S la ***somme*** de la série $\sum f_n$:
   $$\forall x \in X, \quad S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$
   - R_n le ***reste d'ordre*** n de la série $\sum f_n$:
   $$\forall x \in X, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$
2. On dit que $\sum f_n$ ***converge uniformément*** sur X lorsque la suite $\left(S_n\right)_n$ de ses sommes partielles converge uniformément sur X.

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. On a, par croissances comparées,

$$|n^2 f_n(x)| \leq n^{3/2} x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ pour } x \in [0,1[$$

et pour $x = 1$, on a

$$n^2 f_n(1) = n^{3/2}\,\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum f_n$ CS sur $[0,1]$.

Théorème 4.1 (condition nécessaire et suffisante de la CU).

$$\sum f_n \text{ CU sur } X \iff \begin{cases} \sum f_n \text{ CS sur } X \\ R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0 \text{ sur } X. \end{cases}$$

Pratique

Pour étudier la convergence uniforme de la suite $(R_n)_n$ des restes sur X, on peut déterminer une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \|R_n(x)\|_F \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

La série $\sum f_n$ CS sur $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(x\,\mathrm{e}^{-x})^k}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{k}}.$$

La deuxième inégalité est justifier par le fait que l'application $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ est croissante sur $[0,1]$.

Or la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}$ converge d'après la règle de d'Alembert et donc le reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-k}}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c-à-d $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CU}} 0$ sur $[0,1]$. D'où la série $\sum f_n$ CU sur $[0,1]$.

Convergence normale

Définition 4.2 (convergence normale (CN)).

On dit que $\sum f_n$ ***converge normalement*** sur X lorsque :

- Pour tout n, f_n est bornée sur X.
- La série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,X}$ converge.

Pratique

Pour étudier la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur X, on peut déterminer une suite réelle $\big(\alpha_n\big)_n$ telle que

$$\boxed{\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \|f_n(x)\|_F \leq \alpha_n \quad \text{et la série} \quad \sum \alpha_n \text{ converge}}.$$

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f_n(x)| \leq \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}}$ étant convergente car $\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
D'où la série $\sum f_n$ CN sur $[0,1]$.

Proposition 4.1 (CN vs CU).

$$\sum f_n \textit{ CN sur } X \implies \sum f_n \textit{ CU sur } X.$$

Convergence absolue

Définition 4.3 (convergence absolue (CA)).

On dit que $\sum f_n$ ***converge absolument*** sur X lorsque la série $\sum \| f_n(x) \|_F$ est convergente pour tout $x \in X$.

Proposition 4.2 (CN vs CA).

$$\sum f_n \textit{ CN sur } X \implies \sum f_n \textit{ CA sur } X.$$

En résumé, on a les implications suivantes, pour une série de fonctions :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{Convergence uniforme}} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\boxed{\text{Convergence normale}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\text{Convergence simple}} \\
 & \boxed{\text{Convergence absolue}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Toute implication non écrite étant fausse.

Plan

Continuité de la somme d'une série de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de X vers F de somme S :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

où $x \in X$ tel que la série $\sum f_n(x)$ converge.

Théorème 5.1 (continuité locale).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \textit{ est continue en } x_0 \in X \\ \\ \sum f_n \textit{ CU sur un voisinage de } x_0 \textit{ dans } X \end{cases}$$

Alors

la somme S est continue en x_0.

Théorème 5.2 (continuité globale).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est continue sur } X \\ \\ \sum f_n \text{ CU sur un tout compact de } X \end{cases}$$

Alors

$$\text{la somme } S \text{ est continue sur } X.$$

On remplace la CU sur tout compact par la CU sur tout segment[1] *de X lorsque la variable est réelle.*

[1] En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

L'application $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$.
- Par le critère de Leibniz, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- Soit $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \\ &\underset{\text{par le premier terme}}{\overset{\text{majoration du reste}}{\leq}} \frac{1}{(n+1)^x} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum f_n$ CU sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Ainsi, l'application

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc continue sur $]0, +\infty[$.

Proposition 5.1.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie d'élément unité e et B la boule unité ouverte.

1. *L'application $a \longmapsto (e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ est continue sur B.*
2. *L'application $a \longmapsto \exp(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ est continue sur $\mathcal{A}$.*

Théorème 5.3 (interversion des limites).

Soit $a \in \overline{X}$.
Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_n \text{ (limite finie)} \\ \\ \sum f_n \text{ CU sur un voisinage de } a \text{ dans } X \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la série } \sum \ell_n \text{ converge} \\ \\ \lim\limits_{x \to a} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right). \end{cases}$$

Ce résultat peut être adapté en $a = \pm\infty$ *d'une série de fonctions définie sur un intervalle réel non borné.*

$f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0, +\infty[$.
On a

$$f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et la série $\sum f_n$ CU sur $[c, +\infty[$ pour tout $c > 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

En revanche, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ car sinon, on obtient la convergence de la série $\sum (-1)^{n+1}$ puisque $f_n(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell_n = (-1)^{n+1}$.

Intégration sur un segment

Théorème 5.4 (interversion somme intégrale).

On suppose $X = [a,b]$.
Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ \\ \sum f_n \text{ CU sur } [a,b] \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la somme } S \text{ est continue sur } [a,b] \\ \\ \displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) \mathrm{d}t \right). \end{cases}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{it}}$.

Soit $|z| > 1$ et $t \in [0, 2\pi]$. On a

$$\frac{1}{z - \mathrm{e}^{it}} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{e}^{it}}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{it}}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{int}}{z^{n+1}}.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, $f_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{int}}{z^{n+1}}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 2\pi]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty,[0,2\pi]} = \dfrac{1}{|z|^{n+1}}$.

  Or la série $\sum \dfrac{1}{|z|^{n+1}}$ est convergente (série géométrique), donc la série $\sum f_n$ CN sur $[0, 2\pi]$ donc CU sur $[0, 2\pi]$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{z^{n+1}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{z^{n+1}} \mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{0,n}} \right) \\
&= \frac{2\pi}{z}.
\end{aligned}$$

Dérivation

Ici, le domaine de définition X est un intervalle réel I d'intérieur non vide.

Théorème 5.5 (caractère $\mathcal{C}^1$).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \\ \sum f_n \text{ CS sur } I \\ \\ \sum f_n' \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la somme } S \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \forall t \in I, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t). \end{cases}$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Théorème 5.6 (caractère $\mathcal{C}^p$).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \sum f_n^{(k)} \text{ CS sur } I \\ \sum f_n^{(p)} \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la somme } S \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall t \in I,\ \forall k \in [\![0, p]\!],\ \ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(t). \end{cases}$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

Corollaire 5.1 (caractère $\mathcal{C}^\infty$).

Si

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \\ \sum f_n \text{ CS sur } I \\ \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum f_n^{(k)} \text{ CU sur tout segment } \subset I \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \text{la somme } S \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \\ \forall t \in I,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)^{(k)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(t). \end{cases}$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x},\ n \in \mathbb{N}^*, x \in \left]1, +\infty\right[.$$

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]1, +\infty\right[$ et
$$\forall x \in \left]1, +\infty\right[,\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$
- $\sum f_n$ CS sur $\left]1, +\infty\right[$.
- Soit $[a, b] \subset \left]1, +\infty\right[$. Pour $x \in [a, b]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$|f_n^{(k)}(x)| = \left|\frac{(-\ln n)^k}{n^x}\right| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a} = \alpha_n.$$
La série $\sum \alpha_n$ converge car
$$n^{\frac{1+a}{2}} \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } \frac{1+a}{2} > 1,$$
donc la série $\sum f_n^{(k)}$ CN donc CU sur $[a, b]$.

Par suite, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Proposition 5.2.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie et $a \in \mathcal{A}$.

1. *l'application*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{e}_a & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & & t & \longmapsto & \mathrm{e}_a(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^n \end{array}$$

   est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{\mathrm{e}_a^{(k)}(t) = a^k \, \mathrm{e}_a(t) = \mathrm{e}_a(t) a^k}.$$

2. *Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$\boxed{\mathrm{e}_a(s+t) = \mathrm{e}_a(s)\,\mathrm{e}_a(t) = \mathrm{e}_a(t)\,\mathrm{e}_a(s)}$$

   et

$$\boxed{\left(\mathrm{e}_a(t)\right)^{-1} = \mathrm{e}_a(-t)}.$$

Merci pour votre attention!