TD N°8

Endomorphismes d'un espace euclidien (I)

1 Compléments sur les espaces préhilbertiens réels

Exercice 1. `CCINP MP 2021.` On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A \mid B) = \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)$.
Déterminer $D_n(\mathbb{R})^\perp$, l'orthogonal des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. `CCP MP 2006.` Soient $E = \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. On pose $F = \left\{h \in E,\ \displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = 1\right\}$. Calculer $\displaystyle\min_{h\in F} \int_0^1 h(t)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \leq n$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $(.\mid.)$ le produit scalaire canonique et $\|.\|$ la norme associée sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si l'équation $AX = B$ d'inconnue X dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ n'a pas de solution, on cherche X tel que $\|AX - B\|$ soit minimal.

1. On suppose que le rang de A est p.

a. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\|AX - B\|,\ \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}$.

b. Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^\top AX = A^\top B$.

2. Déterminer $\inf\left\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 4. `Classique.` On munit $E = \mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ du produit scalaire défini par $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 5. `CCP MP 2007.` Soit $\big(E,(.\mid.)\big)$ un espace préhilbertien réel et $f \in \mathcal{GL}(E)$. On suppose que :

$$\forall (x,y) \in E,\ \ (x \mid y) = 0 \implies \big(f(x) \mid f(y)\big) = 0.$$

1. Calculer $(x+y \mid x-y)$ lorsque x et y sont deux vecteurs unitaires.

2. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in E,\ \ \|f(x)\| = a\|x\|$.

3. En déduire que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \ \big(f(x) \mid f(y)\big) = a^2(x \mid y)$.

Exercice 6. Soit E un espace préhilbertien réel et A une partie de E.

1. Montrer que $A^\perp$ est une partie fermée.

2. Établir $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

Exercice 7. `CNC MP 2022.` Soit $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, on pose $v_k = e_k - e_{k+1}$. On pose :

$$H = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \sum_{k=1}^n x_k = 0\right\}.$$

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k$.

a. Vérifier que φ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$.

b. En déduire que H est un sev de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

2. Montrer que la famille $\big(v_1,\ldots,v_{n-1}\big)$ est une base de H.

3. Pour tout $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, on pose $F_k = \operatorname{Vect}\big(v_1,\ldots,v_k\big)$ et on note p_k la projection orthogonale sur le sev F_k.

a. Montrer que, pour tout $(j,k) \in \{1,\ldots,n-1\}^2$, $(v_j \mid v_k) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad k \in \{j-1,j+1\} \\ 2 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad k \notin \{j-1,j,j+1\}. \end{cases}$

b. Considérons la famille $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})$ définie par : $\varepsilon_1 = v_1$ et $\varepsilon_k = v_k - p_{k-1}(v_k)$ pour tout $k \in \{2,\ldots,n-1\}$.
Montrer que :

i. $\forall k \in \{1,\ldots,n-1\}$, $\operatorname{Vect}(v_1,\ldots,v_k) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$.

ii. $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1})$ est une famille orthogonale de H.

c. Soit $k \in \{2,\ldots,n-1\}$. On pose $\varepsilon_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j v_j$.

i. Montrer que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})$ est solution du système linéaire $A_k X = B_k$, où $A_k = \big((v_j \mid v_\ell)\big)_{1\leq j,\ell\leq k-1}$ et B_k le vecteur colonne de composantes $(v_1 \mid v_k),\ldots,(v_{k-1} \mid v_k)$.

ii. Montrer que le système $A_k X = B_k$ s'écrit $\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ -x_{k-3} + 2x_{k-2} - x_{k-1} & = & 0 \\ -x_{k-2} + 2x_{k-1} & = & -1 \end{array}\right.$.

iii. Résoudre le système $A_k X = B_k$ et en déduire que $\varepsilon_k = \left(\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k},-1,0,\ldots,0\right)$, le -1 étant situé à la $(k+1)$-ième place.

4. Donner une base orthonormée de H.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que $\operatorname{Im}(A^\top) = (\ker(A))^\perp$.

2. Comparer les espaces $\ker(A)$ et $\ker(A^\top A)$. Même question pour les espaces $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Im}(AA^\top)$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|AX\| \leq \|X\|$ pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\|A^\top X\| \leq \|X\|$ pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = X$. Montrer $A^\top X = X$.

Exercice 10. **1.** Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer : $\forall (X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $X^\top AY = X^\top BY \iff A = B$.

2. Soit $(A,B) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = X^\top BX \iff A = B$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0 \iff A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. `Mines-Ponts MP 2007.` Calculer $\inf\left\{\int_0^1 (t\ln t - at - b)^2 \mathrm{d}t,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Indiquer les valeurs de (a,b) pour lesquelles ce minimum est atteint.

Exercice 12. `Inégalité d'Hadamard.` Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E.

1. Montrer que pour tout n-uplet de vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$, on a : $|\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)| \leq \|x_1\|\ldots\|x_n\|$.

2. Dans quels cas y a-t-il égalité ?

3. **Application :** soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det A| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

2 Formes linéaires et adjoint

Exercice 13. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Indication :** utiliser le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme A de E tel que : $P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\mathrm{d}t$ pour tout $P \in E$.

2. Établir que le polynôme A est de degré n exactement. **Indication :** raisonner par l'absurde et considérer $P = XA$.

Exercice 15. Soit a,b deux vecteurs d'un espace euclidien E et $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall x \in E$, $u(x) = (a \mid x)b - (b \mid x)a$. Déterminer l'adjoint u^* de u.

Exercice 16. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ est muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\varphi(M) = AM^\top A$. Calculer l'adjoint de φ.

Exercice 17. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les propriétés suivantes :

1. Si $u \in \mathcal{GL}(E)$ alors, $u^* \in \mathcal{GL}(E)$ et que $\left(u^*\right)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*$.
2. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\left(P(u)\right)^* = P(u^*)$.
3. $\Pi_{u^*} = \Pi_u$ et $\mathrm{Sp}\,(u^*) = \mathrm{Sp}\,(u)$.
4. $\mathrm{Tr}\,(u^*) = \mathrm{Tr}\,(u)$.
5. $\det(u^*) = \det(u)$.
6. $\chi_{u^*} = \chi_u$.

Exercice 18. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.On rappelle la norme triple de u : $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$.
Montrer que $\|u\| = \|u^*\|$ et que $\|u \circ u^*\| = \|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.

Exercice 19. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$ et que $\mathrm{Im}\,(u^*) = \mathrm{Im}\,(u^* \circ u)$.

Exercice 20. `Un adjoint en dimension infinie.` Soit $E = \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
Soit u l'application de E dans E définie par : $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\quad u\big(f\big)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E et qu'il admet un adjoint u^* à déterminer.

2. Soit λ une valeur propre de $u^* \circ u$ et f un vecteur propre associé.

a. Montrer que $\lambda > 0$ et que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $u^* \circ u$.

Exercice 21. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, $\big(u(x) \mid x\big) = 0$ pour tout $x \in E$.
Démontrer que $u^* = -u$ puis que $\ker u = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$.

Exercice 22. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, u \subset \ker u$. Montrer que $\ker(u + u^*) = \ker u \cap \ker u^*$.

Exercice 23. `Sur l'adjoint d'un projecteur.` Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Vérifier que u^* est un projecteur.

2. Montrer que $u^* = u$ si, et seulement si, u est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, u$.

3. On suppose que u et u^* commutent.

a. Démontrer que $u \circ u^*$ est une projection orthogonale.

b. Démontrer que $\ker(u \circ u^*) \bigcap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$.

c. En déduire que $\ker(u \circ u^*) = \ker u$ et $\mathrm{Im}\,(u \circ u^*) = \mathrm{Im}\, u$.

4. En déduire que u et u^* commutent si, et seulement si, $u = u^*$.

Exercice 24. `Centrale MP 2007.` Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :

i. $\mathrm{Im}\, p$ est orthogonal à $\ker p$;
ii. $p^* = p$;
iii. $\forall x \in E,\quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Indication : pour montrer $(iii) \Longrightarrow (i)$, on appliquera la propriété (iii) à $x + ty$.

Exercice 25. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\quad \|u(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que $\forall x \in E,\quad \|u^*(x)\| \leq \|x\|$.

2. Montrer $\ker\big(u - \mathrm{Id}_E\big) = \ker\big(u^* - \mathrm{Id}_E\big)$.

3. Montrer que $E = \ker\big(u - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Im}\,\big(u - \mathrm{Id}_E\big)$.

3 Matrices orthogonales, isométries vectorielles

Exercice 26. `Sur les coefficients d'une matrice orthogonale.` Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que

1. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad |a_{i,j}| \leq 1$.

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = n$.

3. $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\right| \leq n$. **Indication :** remarquer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{i,j} = X^\top A X$ où $X = \left(x_1, \dots, x_n\right)^\top$.

4. $n \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Exercice 27. L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|AX\| = \|X\|$ pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 28. Montrer que le groupe $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 3$, n'est pas commutatif.

Exercice 29. `Commutant de` $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ `dans` $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}\big(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\big) = \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \ M\Omega = \Omega M\big\}$ le commutant de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\mathcal{C}\big(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\big) = \big\{\lambda.\mathrm{I}_n,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\big\}$.

Exercice 30. `CCP PSI 2007.` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Montrer que $\mathrm{I}_n + A$ est inversible.

2. On pose $B = \big(\mathrm{I}_n + A\big)^{-1}\big(\mathrm{I}_n - A\big)$. Montrer que $B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 31. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

1. Montrer que les colonnes de A comportent un et un seul coefficient non nul.

2. En déduire que A est constituée des colonnes de la matrice I_n dans un certain ordre.

Exercice 32. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et triangulaire supérieure. Démontrer que A est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1.

Exercice 33. `Factorisation QR.`

1. Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base de E. On note $\mathcal{C}$ l'orthonormalisée de Schmidt de $\mathcal{B}$. Que dire de la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$?

2. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs telles que $A = QR$.

3. Démontrer que le couple (Q, R) est unique.

Exercice 34. Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonalement semblables.

Exercice 35. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe. **Indication :** raisonner par l'absurde.

2. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Indication :** on pourra considérer la norme $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(A^\top A\right)}$.

Exercice 36. `Mines-Ponts MP 2006.` Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux quelconques des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

i. $u \in \mathcal{O}(E)$; **ii.** $u^2 = -\mathrm{Id}_E$; **iii.** $\forall x \in E,\ u(x)$ est orthogonal à x.

Exercice 37. Montrer que, dans un espace euclidien :

1. Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

2. Les réflexions sont des isométries négatives.

3. Une symétrie orthogonale u est une isométrie positive si, et seulement si, $\dim\ker\big(u + \mathrm{Id}_E\big)$ est pair.

On rappelle que u est une réflexion de E lorsque u est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Exercice 38. `Mines-Ponts MP 2006.` Soient E un espace euclidien, $u \in E$ non nul et $g \in \mathcal{O}(E)$. On note σ la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}\,(u)^\perp$.
Démontrer que l'endomorphisme $f = g \circ \sigma \circ g^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}\,\big(g(u)\big)^\perp$.

Exercice 39. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique i.e. $u^* = -u$.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_E + u$ est un automorphisme de E.

2. Montrer que $v = \big(\mathrm{Id}_E - u\big) \circ \big(\mathrm{Id}_E + u\big)^{-1}$ est une isométrie positive.

3. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie qui n'admettant pas -1 pour valeur propre.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique u tel que : $v = \big(\mathrm{Id}_E - u\big) \circ \big(\mathrm{Id}_E + u\big)^{-1}$.

Exercice 40. `CCP MP 2005.` Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{O}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$.

1. Montrer que $\big(\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - u)\big)^\perp = \ker(\mathrm{Id}_E - u)$.

2. Montrer que la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ converge simplement vers le projecteur orthogonal sur $\ker(\mathrm{Id}_E - u)$.