TD N°5

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

1 Dérivation

Exercice 1. Soit F un evn de dimension finie et $f:\mathbb{R}\longrightarrow F$ dérivable en 0. On suppose que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=2f(x).$$

Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f'(0)x$.

Exercice 2. **1.** Montrer que la fonction définie sur $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité à $]-\pi,\pi[$.

2. Montrer que le prolongement ainsi obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$.

Exercice 3. Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, dérivable en 0 et telle que $f(0)=0$.
On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}f'(0)$.

Exercice 4. Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{\pi\mathbb{Z}\}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ de $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x\cos\theta+1}$. **Indication :** décomposer en éléments simples f.

Exercice 5. `Dérivées majorées par un polynôme.` Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante :

$$\exists P\in\mathbb{R}[X] \text{ de degré impair tel que, } \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |f^{(n)}(x)|\le|P(x)|.$$

1. Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad f^{(n)}(a)=0$.

2. En déduire que f est identiquement nulle.

3. Le résultat subsiste-t-il si on suppose que P est de degré pair ?

Exercice 6. `Calculs de déterminants par dérivation.` Calculer les déterminants suivant par dérivation :

1. $\delta(x)=\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x\\ x & x+a_2 & x\\ x & x & x+a_3\end{vmatrix}$. **2.** $\Delta(x)=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1\\ 1 & 1+x & 1\\ 1 & 1 & 1+x\end{vmatrix}$.

Exercice 7. `Inégalités de Kolmogorov.` Soient F un evn de dimension finie et $f:\mathbb{R}\longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées.
On pose $M_0=\|f\|_\infty$, $M_1=\|f'\|_\infty$ et $M_2=\|f''\|_\infty$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Établir que pour tout $h>0$, $\ \|f'(x)\|\le\dfrac{2M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2}$. **Indication :** appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$.

2. En déduire que $M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 8. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$. On pose $D_n(t)=\begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \frac{t^2}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1\\ \frac{t^n}{n!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2!} & t\end{vmatrix}$.

1. Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(t)$.

2. En déduire l'expression de $D_n(t)$.

Exercice 9. En dérivant n-fois $t\longmapsto t^{2n}$, calculer la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Exercice 10. `Développement asymptotique de la somme de Riemann.`

1. Soit $f\in\mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f, montrer

$$S_n(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

b. En déduire

$$S_n(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\big(f(1)-f(0)\big)+\frac{1}{12n^2}\big(f'(1)-f'(0)\big)+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

2. Donner un développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{k^2+n^2}$.

2 Intégration

Exercice 11. **1.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^\pi \cos^n t\cos nt\ \mathrm{d}t$.

2. Plus généralement calculer, pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^\pi \cos^n t\cos pt\ \mathrm{d}t$.

Exercice 12. Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et continue en 0. On pose, pour $h>0$,

$$F(h)=\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to0^+}F(h)=\frac{\pi}{2}f(0)$. **Indication :** prouver que $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}\big(f(x)-f(0)\big)\mathrm{d}x=0$.

Exercice 13. **1.** Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F_n(X)=\dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.

2. En déduire, à l'aide des sommes de Riemann, les intégrales : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-\mathrm{e}^{it}}$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x-\cos t}{x^2-2x\cos t+1}\mathrm{d}t$.

Exercice 14. Calculer, à l'aide des sommes de Riemann, l'intégrale : $I_k=\displaystyle\int_0^\pi\cos^{2k}t\mathrm{d}t$.

Exercice 15. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. Prouver que :

$$\int_0^1\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t\le\frac{1}{2}\int_0^1\big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 16. Soit F un evn de dimension finie et f une application continue de $[0,1]$ dans F. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 17. Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $p>0$, on note : $u_p=\left(\displaystyle\int_a^b(f(t))^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty}u_p=\sup_{t\in[a,b]}f(t).$$

Exercice 18. **1.** Soit $r\in\,]-1,1[$. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\big(r^2-2r\cos(2k\pi/n)+1\big)$.

2. En déduire, à l'aide des sommes de Riemann, la valeur de $I(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\big(r^2-2r\cos\theta+1\big)\mathrm{d}\theta$.

3. Quelle est la valeur de $I(r)$ lorsque $|r|>1$?

Exercice 19. Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n>0$, on pose :

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)g\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ dans le cas où g est lipschitzienne.

2. Que dire si f et g sont seulement continues ? **Indication :** utiliser le théorème de Heine.