Devoir libre N°9 (correction)

à rendre le mardi 06/01/2026.

Problème

Deux intégrales classiques

Partie I : Intégrale de Dirichlet.

1. a. Par une intégration par parties on a

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

b. On a $\dfrac{\cos t}{t^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $t \longmapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et $\dfrac{\cos A}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge. De plus, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est cpm sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0^+. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

2. Par une intégration par parties on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t &= \underbrace{\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{t^2}\mathrm{d}t \\ &\underset{x=t/2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

3. Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin t \leq t \leq \tan t$ donc

$$\cot^2 t \sin^2(nt) \leq \frac{\sin^2(nt)}{t^2} \leq \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}.$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 t \sin^2(nt)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t.$$

(les intégrales à droite et à gauche sont bien définies). Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \leq J_n \leq A_n$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt) - \sin^2((n+1)t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2((n+2)t) - \sin^2((n+1)t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\cos(\frac{2n+1}{2}t)\sin t \sin(\frac{2n+1}{2}t)\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos(\frac{2n+3}{2}t)\sin t\sin(\frac{2n+3}{2}t)\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin((2n+1)t)\sin(2t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)t)\sin(2t)}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2t)\cos((2n+2)t)\sin t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos((2n+2)t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+3)t)\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \sin(\pi/2) + (-1)^n\sin(3\pi/2) = 0.\end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} - \cot^2(t)\sin^2(nt) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2nt))\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

c. On a $A_n - A_{n+1} = A_{n+1} - A_{n+2}$ donc la suite $(A_n - A_{n+1})_n$ est constante donc

$$A_n - A_{n+1} = A_0 - A_1 = 0 - \pi/2 = -\pi/2.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = A_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(A_k - A_{k+1}) = -\frac{n\pi}{2}.$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$.

5. Pour $n \geq 1$ on a

$$\frac{J_n}{n} \underset{x=nt}{=} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = I.$$

6. Pour $n \geq 1$ on a $\frac{B_n}{n} \leq \frac{J_n}{n} \leq \frac{A_n}{n}$ donc $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \leq \frac{J_n}{n} \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\frac{J_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$. D'où

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Partie II : Intégrale de Gauss.

1. a. $W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^n t}_{\geq 0}\underbrace{(\sin t - 1)}_{\leq 0}\,\mathrm{d}t \leq 0$. Donc la suite $(W_n)_n$ est décroissante.

b. Par une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin^{n+1} t\mathrm{d}t \\ &= \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^n t\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t \sin^n t\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

c. On a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ donc

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots\times 1}{(2p)(2p-2)\ldots\times 2}W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

et

$$W_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\ldots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\ldots\times 3}W_1 = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

d. Comme $(W_n)_n$ est décroissante alors

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Ainsi $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

e. D'une part, en séparant les cas n pair et n impair à partir des formules trouvées ci-dessus, on obtient la formule

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
D'autre part, par la formule de Stirling on a

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{K\left(\frac{2p}{\mathrm{e}}\right)^2\sqrt{2p}}{2^{2p}\left(K\left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p\sqrt{p}\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2p}K}.$$

Ainsi $\dfrac{\pi}{\sqrt{2p}K} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. D'où $K = \sqrt{2\pi}$.

2. $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est positive cpm sur $[0,+\infty[$ et $t^2\,\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3. La fonction $g : t \longmapsto -\ln(1-t)$ est convexe sur $]-\infty, 1[$ car $g'' \geq 0$. Donc pour tout $t \in\,]-\infty, 1[$,

$$g(t) \geq (t-0)\times 1 + 0 \ \text{ i.e. } \ \ln(1-t) \leq -t.$$

Ainsi $\forall t \in [0, \sqrt{n}[$, $\ln\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) \leq -\dfrac{t^2}{n}$.

4. Soit $t \in [0, \sqrt{n}[$, on a

$$\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right) \leq \mathrm{e}^{-t^2}$$

donc $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2}$. Cette dernière inégalité reste vraie lorsque $t = \sqrt{n}$ donc

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \underset{t=\sqrt{n}\cos x}{=} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

Ainsi $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
De même, on montre que $\forall t \in\,]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$. Donc

$$\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t &\underset{t=\sqrt{n}\tan x}{=} \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} \left(1+\tan^2 x\right)^{-n+1} \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} x\mathrm{d}x \\
&\underset{x=\pi/2-t}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\mathrm{d}t = \sqrt{n}W_{2n-2}.
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$.

5. On a

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \text{ i.e. } \sqrt{n}W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même $\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.