Devoir libre N°9

à rendre le mardi 06/01/2026.

Problème

Deux intégrales classiques

Partie I : Intégrale de Dirichlet.

On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^2} \mathrm{d}t.$

1. a. Soit $A > 1$. Montrer

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} \mathrm{d}t.$$

b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.

2. Montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t.$

3. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \leq J_n \leq A_n \quad$ où $\quad A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} \mathrm{d}t \quad$ et $\quad B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^2(t)\ \sin^2(nt) \mathrm{d}t.$

Indication. utiliser l'inégalité $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sin x \leq x \leq \tan x.$

4. a. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0.$

b. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4}.$

c. En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.

5. Montrer $\dfrac{J_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} I.$

6. En déduire que $I = \dfrac{\pi}{2}.$

Partie II : Intégrale de Gauss.

On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \mathrm{d}t.$
On rappelle qu'il existe une constante $K > 0$ tel que

$$n! \underset{+\infty}{\sim} K\sqrt{n} n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

1. a. Montrer que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.

b. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n.$

c. En déduire W_{2p} et W_{2p+1} à l'aide de factorielles.

d. Montrer $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}.$

e. En déduire la valeur de K.

2. Montrer que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

3. En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[\,,\ \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}.$$

4. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

Indication. pour l'inégalité à gauche, utiliser le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin u$ et $t = \sqrt{n}\tan u$ pour l'inégalité à droite.

5. En déduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.