Chapitre 8

Endomorphismes d’un espace euclidien

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

Plan

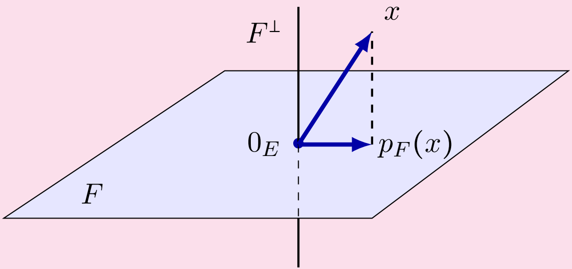
Rappels et compléments sur les espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre et sauf mentionné, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Le couple $\big(E, (.\mid .)\big)$ désigne un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Définition 1.1 (projection orthogonale).

On appelle ***projection orthogonale*** sur F, la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.


x
$F^\perp$
0_E
$p_F(x)$
F

Théorème 1.1 (expression du projeté orthogonal dans une b.o.n).

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ *une b.o.n. de* F.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i}.$$

Théorème 1.2.

Soit $x \in E$.

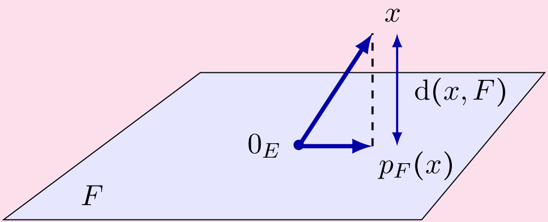
$$\boxed{\forall y \in F,\ \ \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|}$$

avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.

Corollaire 1.1 (la distance d'un vecteur à un sev est atteinte en son projeté orthogonal).

Soit $x \in E$.

$$\boxed{\mathrm{d}(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}}.$$



Théorème 1.3 (inégalité de Bessel).

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite orthonormale de vecteurs de* E.
Pour tout $x \in E$, *la suite* $\big((x \mid e_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de carré sommable et*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} (x \mid e_n)^2 \leq \|x\|^2}.$$

Plan

Formes linéaires d'un espace euclidien

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Soit $a \in E$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & (a\,|\,x) \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.

Théorème 2.1 (représentation des formes linéaires dans un espace euclidien).

L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ & & a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels appelé ***l'isomorphisme canonique*** *de E vers $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.*
En particulier,

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}),\ \exists!\, a \in E,\ \forall x \in E,\ \ \varphi(x) = (a \mid x)}.$$

Adjoint d'un endomorphisme

Proposition 2.1 (existence de l'adjoint dans un espace euclidien).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ ***unique*** *tel que*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \ \big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid v(y)\big)}.$$

L'endomorphisme v est appelé ***l'adjoint*** *de u. On le note $u^\star$.*

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u_A(X) = XA$. Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\left(u_A(X) \mid Y\right) &= \operatorname{Tr}\left((XA)^\top Y\right)\\ &= \operatorname{Tr}\left(A^\top X^\top Y\right)\\ &= \operatorname{Tr}\left(X^\top Y A^\top\right)\\ &= \left(X \mid Y A^\top\right)\\ &= \left(X \mid u_{A^\top}(Y)\right).\end{aligned}$$

D'où $u_A^\star = u_{A^\top}$.

Proposition 2.2 (matrice de l'adjoint dans une b.o.n).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E. Si $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors

$$\boxed{A^\top = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u^\star)}.$$

Proposition 2.3 (propriétés).

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\left(\lambda u + \mu v\right)^\star = \lambda u^\star + \mu v^\star$.
2. $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$.
3. $(u^\star)^\star = u$.
4. $\mathrm{rg}\,(u^\star) = \mathrm{rg}\,(u)$.
5. $\ker(u^\star) = \mathrm{Im}\,(u)^\perp$.
6. $\mathrm{Im}\,(u^\star) = \ker(u)^\perp$.

Théorème 2.2 (sous-espaces stables).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. *Si* F *est un sev de* E *stable par* u *alors* $F^\perp$ *est stable par* $u^\star$.

Plan

Matrices orthogonales

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Définition 3.1 (matrice orthogonale).

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale*** si $A^\top A = \mathrm{I}_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

$$\boxed{\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ A^\top A = \mathrm{I}_n\right\}}.$$

1. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^\top$.
2. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) = \pm 1$.

Proposition 3.1 (structure de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$).

L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\big(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times\big)$ appelé ***groupe orthogonal*** *d'ordre n.*

Théorème 3.1 (caractérisation par la famille des lignes, des colonnes).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

1. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;
2. *Les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale*[1] *de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;*
3. *Les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.*

[1] Pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $(X \mid Y) = X^\top Y$.

$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est orthogonale : ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Théorème 3.2 (matrice de passage entre deux b.o.n).

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :

1. *$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E;*
2. *$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

De plus, si tel est le cas,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P^\top}.$$

Définition 3.2 (matrices orthogonalement semblables).

On dit que A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont ***orthogonalement semblables*** s'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^\top AP$.

Définition 3.3 (matrice orthogonale positive, négative).

1. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale positive*** ou ***directe*** si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 1$. On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives.

$$\boxed{\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \ \det(A) = 1\right\}}.$$

2. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***orthogonale négative*** ou ***indirecte*** si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\det(A) = -1$. On note $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales négatives.

$$\boxed{\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \ \det(A) = -1\right\}}.$$

Proposition 3.2 (structure de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$).

L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe[1] *de $\left(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times\right)$ appelé* ***groupe spécial orthogonal*** *d'ordre n.*

[1] Attention, l'ensemble $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe : $\mathrm{I}_n \notin \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Proposition 3.3.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux b.o.n.d. (base orthonormale directe) de l'espace euclidien orienté E.

$$\boxed{\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \ \ \det_{\mathcal{B}}\big(u_1, \ldots, u_n\big) = \det_{\mathcal{B}'}\big(u_1, \ldots, u_n\big)}.$$

Définition 3.4 (isométrie vectorielle).

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une ***isométrie vectorielle*** ou ***automorphisme orthogonal*** de E si u conserve la norme :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|}.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

$$\boxed{\mathcal{O}(E) \overset{\text{déf}}{=} \left\{u \in \mathcal{L}(E), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|\right\}}.$$

Théorème 3.3 (caractérisation des isométries vectorielles).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. *On a équivalence entre :*

1. $u \in \mathcal{O}(E)$;
2. $\forall (x,y) \in E^2, \ \big(u(x) \mid u(y)\big) = (x \mid y)$;
3. u *transforme une (toute) b.o.n. de* E *en une b.o.n de* E;
4. $\mathrm{Mat}\,(u)$ *dans une (toute) b.o.n. de* E *est une matrice orthogonale;*
5. $u^\star \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $\det(u) = \pm 1$.

Définition 3.5 (isométrie vectorielle directe, indirecte).

1. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une ***isométrie positive*** ou ***directe*** si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\det(u) = 1$. On note $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$ l'ensemble des isométries positives[1].

$$\boxed{\mathcal{SO}(E) \overset{\text{déf}}{=} \left\{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = 1\right\}}.$$

2. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une ***isométrie négative*** ou ***indirecte*** si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\det(u) = -1$. On note $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries négatives.

$$\boxed{\mathcal{O}^-(E) \overset{\text{déf}}{=} \left\{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = -1\right\}}.$$

[1] Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont appelés aussi des ***rotations*** de E.

Proposition 3.4 (structure de $\mathcal{SO}(E)$).

L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe[1] *de $\left(\mathcal{GL}(E), \circ\right)$ appelé* ***groupe spécial orthogonal****.*

[1] Attention, l'ensemble $\mathcal{O}^-(E)$ n'est pas un groupe : $\mathrm{Id}_E \notin \mathcal{O}^-(E)$.

Théorème 3.4 (caractérisation des isométries positives).

Soit E un espace euclidien orienté et $u \in \mathcal{L}(E)$.
$u \in \mathcal{SO}(E)$ si, et seulement si, u transforme une (toute) b.o.n.d. de E en une b.o.n.d. de E.

Soit E un espace euclidien orienté et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. $u \in \mathcal{SO}(E)$ si, et seulement si, u transforme une (toute) b.o.n. de E en une b.o.n. de E de même orientation.
2. $u \in \mathcal{O}^-(E)$ si, et seulement si, u transforme une (toute) b.o.n. de E en une b.o.n. de E d'orientation opposé.

Isométries vectorielles en dimension 2

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Proposition 3.5 (description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$).

1. $\boxed{\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \textit{tel que} \ a^2 + b^2 = 1 \right\}}.$

2. $\boxed{\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \textit{avec} \ \theta \in \mathbb{R} \right\}}$

3. $\boxed{\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \ \textit{avec} \ \theta \in \mathbb{R} \right\}}.$

L'application

$$R : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ \theta & \longmapsto & R(\theta) \end{array}$$

est un morphisme de groupes surjectif appelé le ***morphisme canonique*** de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Ainsi $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe ***commutatif***.

Théorème 3.5 (nature des isométries positives).

Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.

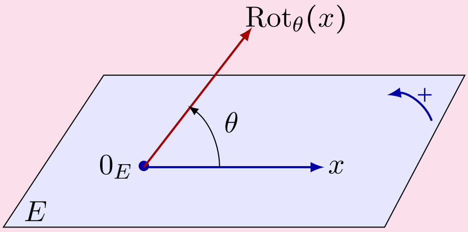
1. *Il existe* ***un unique*** $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ *tel que pour* ***toute b.o.n.d.*** $\mathcal{B}$ *de* E *:*

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(\theta)}.$$

On dit que u *est la* ***rotation vectorielle*** *d'angle* θ *et on note* $u = \operatorname{Rot}_\theta$.

2. *Soit* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *une b.o.n.d. de* E.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Rot}_\theta(\overrightarrow{i}) &= \cos\theta.\overrightarrow{i} + \sin\theta.\overrightarrow{j} \\ &\textit{et} \\ \operatorname{Rot}_\theta(\overrightarrow{j}) &= -\sin\theta.\overrightarrow{i} + \cos\theta.\overrightarrow{j} \end{aligned}}.$$



$\mathrm{Rot}_\theta(x)$
$+$
θ
0_E
x
E

$\mathcal{SO}(E)$ est un groupe ***commutatif*** (ici E est un plan euclidien).

Corollaire 3.1 (classification des isométries d'un plan euclidien).

Dans un plan euclidien E, toute isométrie est soit une réflexion, soit une rotation.

Théorème 3.6 (les réflexions engendrent $\mathcal{SO}(E)$).

1. *Toute rotation est la composée de deux réflexions.*
2. *Plus précisément, si $r \in \mathcal{SO}(E)$ et $s \in \mathcal{O}^-(E)$, alors il existe $s_1 \in \mathcal{O}^-(E)$* ***unique*** *tel que*[1]

$$\boxed{r = s_1 \circ s}.$$

[1] De même, il existe $s_2 \in \mathcal{O}^-(E)$ ***unique*** tel que $r = s \circ s_2$.

Plan

Réduction des isométries vectorielles

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Théorème 4.1 $\big($**sous-espaces stables par une isométrie, spectre**$\big)$**.**

1. *Si* $u \in \mathcal{O}(E)$ *et* F *un sev de* E *stable par* u *alors* $F^{\perp}$ *est stable par* u.
2. *Si* $u \in \mathcal{O}(E)$ *alors* $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \big\{-1, 1\big\}$ *et les sous-espaces* $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ *et* $\ker(u + \mathrm{Id}_E)$ *sont orthogonaux.*

Théorème 4.2 $\big($**réduction d'une isométrie dans une b.o.n**$\big)$**.**

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$*. Il existe une b.o.n.* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que :*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\,\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r)\right)}$$

avec $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{R}$ *et* $p, q, r \in \mathbb{N}$ *tels que* $p = \dim\big(\ker(u - \mathrm{Id}_E)\big)$, $q = \dim\big(\ker(u + \mathrm{Id}_E)\big)$ *et* $p + q + 2r = n$.

Le groupe $\mathcal{SO}(E)$ ***n'est pas commutatif*** pour $\dim(E) \geq 3$.

Théorème 4.3 (réduction d'une matrice orthogonale).

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$*. Il existe* $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\boxed{A = PRP^\top \quad \text{où} \quad R = \operatorname{diag}\left(\mathrm{I}_p, -\mathrm{I}_q, R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r)\right)}$$

avec $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{R}$ *et* $p, q, r \in \mathbb{N}$ *tels que* $p + q + 2r = n$.

Isométries vectorielles en dimension 3

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

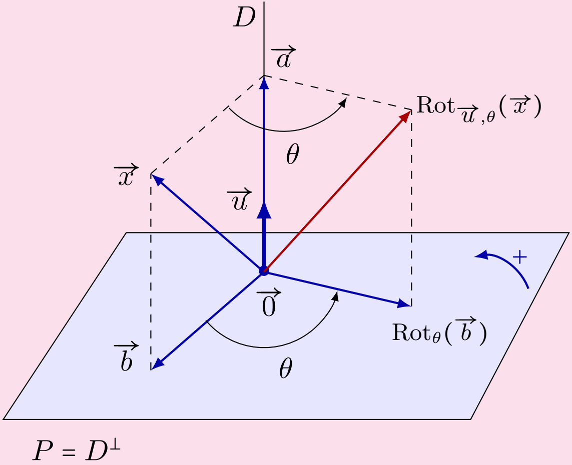
Proposition 4.1 (rotation de l'espace).

Soit $f \in \mathcal{SO}(E) \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$ (rotation autre que l'identité).

1. $1 \in \mathrm{Sp}\,(f)$.
2. *f peut être représentée dans une b.o.n. par la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

*On dit que f est la **rotation d'axe dirigée et orienté par $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ**. On la note $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta}$.*



D
$\overrightarrow{a}$
$\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta}(\overrightarrow{x})$
θ
$\overrightarrow{x}$
$\overrightarrow{u}$
$+$
$\overrightarrow{0}$
$\mathrm{Rot}_\theta(\overrightarrow{b})$
$\overrightarrow{b}$
θ
$P = D^\perp$

Propriétés de $\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta}$

1. Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :
$$\boxed{\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \, [2\pi]}$$
et
$$\boxed{\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta} \circ \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta'} = \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta'} \circ \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta+\theta'}}.$$
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$$\boxed{\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta}^{-1} = \mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},-\theta}}$$
et
$$\boxed{\mathrm{Rot}_{\overrightarrow{u},\theta} = \mathrm{Rot}_{-\overrightarrow{u},-\theta}}.$$

Plan

Endomorphismes autoadjoints

Le couple $\big(E, (.\,|\,.)\big)$ désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Définition 5.1 (endomorphisme autoadjoint).

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est ***autoadjoint*** ou ***symétrique*** si $\boxed{u^\star = u}$.
On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

$$\boxed{\mathscr{S}(E) \overset{\text{déf}}{=} \left\{u \in \mathcal{L}(E), \quad u^\star = u\right\}}.$$

Théorème 5.1 (caractérisation des endomorphismes autoadjoints).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. $u \in \mathscr{S}(E)$;
2. $\forall x, y \in E, \quad \big(u(x)\,|\,y\big) = \big(x\,|\,u(y)\big)$;
3. $\mathrm{Mat}\,(u)$ *dans une (toute) b.o.n. de E est une matrice symétrique.*

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

et φ l'endomorphisme de E définie, pour tout $P \in E$, par

$$\varphi(P) = \big((X^2 - 1)P'\big)'.$$

Pour tout $P, Q \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(P) \mid Q\big) &= \int_{-1}^{1} \big((t^2-1)P'(t)\big)' Q(t)\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\big]_{-1}^{1}}_{=0} \\
&- \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\underbrace{\big[(t^2-1)Q'(t)P(t)\big]_{-1}^{1}}_{=0} \\
&+ \int_{-1}^{1} \big((t^2-1)Q'(t)\big)' P(t)\mathrm{d}t \\
&= \big(P \mid \varphi(Q)\big).
\end{aligned}$$

D'où $\varphi \in \mathscr{S}(E)$.

Corollaire 5.1 (structure de $\mathscr{S}(E)$).

$\mathscr{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En particulier

$$\boxed{\dim \mathscr{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Réduction des endomorphismes autoadjoints

Théorème 5.2 (stabilité de l'orthogonal d'un sev stable).

Si $u \in \mathscr{S}(E)$ et F un sev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u. De plus :

$$u_F \in \mathscr{S}(F) \text{ et } u_{F^\perp} \in \mathscr{S}(F^\perp).$$

Proposition 5.1 (propriétés).

Si $u \in \mathscr{S}(E)$ alors le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux pour $\lambda \neq \mu$.

Théorème 5.3 (théorème spectral (version vectorielle)).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*. On a équivalence entre :*

1. $u \in \mathscr{S}(E)$;
2. $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} E_\lambda(u)$.
3. u *est diagonalisable dans une b.o.n. de* E;

Théorème 5.4 (théorème spectral (version matricielle)).

$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *si, et seulement si, il existe* $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *et* $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonale telles que :*

$$\boxed{A = PDP^\top}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = PDP^\top$.

- $\chi_A(X) = (X-1)(X+2)^2$. On a
$$E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
- Sans calcul, on peut affirmer que $E_1(A)$ est une droite normale[1] au plan $E_{-2}(A)$:
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[1] un vecteur normal au plan est le produit vectoriel de deux vecteurs qui engendrent ce plan.

- On obtient une b.o.n. du plan $E_{-2}(A)$ en considérant les vecteurs
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$
- On obtient une b.o.n. de la droite $E_1(A)$ avec le vecteur
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
- Les vecteurs e_1, e_2, e_3 déterminent alors les colonnes d'une matrice de passage orthogonale P convenable : $A = PDP^\top$ avec
$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\0 & 2 & \sqrt{2}\\-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est symétrique non diagonalisable car nilpotente $(A^2 = \mathrm{O}_2)$.

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition 5.2 (endomorphisme autoadjoint positif, défini positif).

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

1. On dit que u est ***positif*** si

$$\boxed{\forall x \in E,\ \ \big(u(x) \mid x\big) \geq 0}.$$

   On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E.

2. On dit que u est ***défini positif*** si

$$\boxed{\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \ \big(u(x) \mid x\big) > 0}.$$

   On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E.

Théorème 5.5 (caractérisation spectrale).

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. *On a :*

$$\boxed{u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathbb{R}^+} \quad \textit{et} \quad \boxed{u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}\,(u) \subset \mathbb{R}^{+*}}.$$

😊

L'endomorphisme φ (exemple ci-dessus) de $E = \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = \big((X^2-1)P'\big)'$ vérifie :

- $\varphi \in \mathscr{S}(E)$.
- $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X$ et

$$\varphi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \text{ pour } 2 \leq k \leq n$$

  donc la matrice de φ dans la base canonique de E est triangulaire supérieure et par suite,

$$\mathrm{Sp}\,(\varphi) = \Big\{k(k+1),\ \ k \in [\![0,n]\!]\Big\}.$$

Ainsi $\varphi \in \mathscr{S}^+(E)$.

Définition 5.3 (matrice symétrique positive, définie positive).

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est ***positive*** si

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top A X \geq 0}.$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives d'ordre n.

2. On dit que A est ***définie positive*** si

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{\mathrm{O}_{n,1}\right\}, \quad X^\top A X > 0}.$$

On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n.

Théorème 5.6 (caractérisation spectrale).

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *On a :*

$$\boxed{A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}^+} \text{ et } \boxed{A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}\,(A) \subset \mathbb{R}^{+*}}.$$

!

1. Les ensembles précédents peuvent être écrits de la manière suivante :

$$\mathscr{S}^{++}(E) = \mathscr{S}^+(E) \cap \mathcal{GL}(E)$$

et

$$\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

2. Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E. On a :

$$u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$$

et

$$u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Merci pour votre attention!