

Chapitre 11

Équations différentielles linéaires

M. BINYZE

<https://supspé.com>

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

- 1 EDL1 vectorielles
- 2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n
- 3 Problèmes de raccordement

- 1 EDL1 vectorielles
- 2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n
- 3 Problèmes de raccordement

Généralités

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace normé de dimension finie.

Soit $n = \dim F$ et $\mathcal{B}$ une base de F .

Définition 1.1 (équation linéaires vectorielles du premier ordre).

- 1 On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL1) vectorielle**, toute équation de la forme

$$(\mathcal{E}) : x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$$

d'inconnue $x : I \longrightarrow F$ où $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ et $b : I \longrightarrow F$.

- 2 On appelle **EDL homogène associée à $(\mathcal{E})$** , l'équation

$$(\mathcal{E}_0) : x'(t) = a(t)(x(t)).$$

- 3 On appelle **solution de $(\mathcal{E})$** toute fonction dérivable et vérifie l'équation $(\mathcal{E})$.



Traduction matricielle

Posons :

$$X(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

- L'équation vectorielle $(\mathcal{E})$ équivaut à l'équation matricielle

$$(E) : X'(t) = A(t).X(t) + B(t).$$



- Si on note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ et

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}. \text{ Alors l'équation } (\mathcal{E}) \text{ équivaut au système}$$

différentiel :

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{1,1}(t)x_1(t) & + \dots + & a_{1,n}(t)x_n(t) & + & b_1(t) \\ & \vdots & & & \vdots \\ & \vdots & & & \vdots \\ x'_n(t) = a_{n,1}(t)x_1(t) & + \dots + & a_{n,n}(t)x_n(t) & + & b_n(t) \end{cases}$$

Théorème 1.1 (théorème de Cauchy linéaire).

Si $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ et $b : I \longrightarrow F$ sont continues sur I alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times F$, le problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) : \begin{cases} x'(t) &= a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution φ définie sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(\varphi(s)) + b(s)) \, ds.$$



1 Soient φ et ψ deux solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur I .

$$\exists t_0 \in I, \varphi(t_0) = \psi(t_0) \implies \forall t \in I, \varphi(t) = \psi(t).$$

2 Toute solution non nulle de $(\mathcal{E}_0)$ ne s'annule en aucun point de I .

Proposition 1.1 (structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$).

- 1 L'ensemble, $S_{\mathcal{E}_0}$, des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est un sev de $\mathcal{C}^1(I, F)$.
- 2 Soit $t_0 \in I$ fixé. L'application

$$\begin{aligned}\Phi_{t_0} : S_{\mathcal{E}_0} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto x(t_0)\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'ev. En particulier, $\dim S_{\mathcal{E}_0} = \dim F$.

- 3 L'ensemble, $S_{\mathcal{E}}$, des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, F)$ de direction $S_{\mathcal{E}_0}$:

$$S_{\mathcal{E}} = \varphi + S_{\mathcal{E}_0} = \left\{ \varphi + \varphi_0, \varphi_0 \in S_{\mathcal{E}_0} \right\}$$

où φ une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Définition 1.2 (système fondamental de solutions de $S_{\mathcal{E}_0}$).

On appelle **système fondamental de solutions** (s.f.s) de $\mathcal{E}_0$ toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $S_{\mathcal{E}_0}$.

Proposition 1.2 (méthode de variation des constantes).

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un s.f.s de $S_{\mathcal{E}_0}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur I . On a équivalence entre :

- 1 $\varphi : t \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(t)$ solution de $(\mathcal{E})$;
- 2 $\forall t \in I, \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t) \varphi_i(t) = b(t).$

Résolution de l'EDL1 homogène à coefficients constants

Soit $a \in \mathcal{L}(F)$. On considère l'EDL1 homogène à coefficients constants :

$$(\mathcal{E}_0) : x'(t) = a(x(t)).$$

$(\mathcal{E}_0)$ équivaut à l'équation matricielle

$$(E_0) : X'(t) = A.X(t)$$

où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$.

Théorème 1.2 (résolution de $(\mathcal{E}_0)$ et le $(\mathcal{PC})$ associé à $(\mathcal{E}_0)$).

- 1 Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les applications $x : t \mapsto e^{ta}(c)$ où $c \in F$.
- 2 Soit $(t_0, x_0) \in I \times F$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) : \begin{cases} x'(t) &= a(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

est donnée par $\forall t \in I, x(t) = e^{(t-t_0)a}(x_0)$.

Corollaire 1.1 (résolution de (E_0) et le $(\mathcal{PC})$ associé à (E_0)).

1 Les solutions de (E_0) sont les applications

$$X : t \mapsto e^{tA} \cdot C \quad \text{où } C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

2 Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) : \begin{cases} X'(t) &= A.X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

est donnée par $\forall t \in I, X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot X_0$.



Résoudre sur $\mathbb{R}$, le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

avec $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ et $x_3(0) = 0$.

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{cases} X'(t) &= A.X(t) \\ X(0) &= X_0. \end{cases}$$



A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= P \exp(tD) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



L'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) &= A.X(t) \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$
est

$$X : t \longmapsto \exp(tA).X_0 = \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) &= e^t - e^{2t} \\ x_2(t) &= e^{2t} \\ x_3(t) &= -e^t + e^{2t} \end{cases}.$$

Résolution de l'EDL1 à coefficients constants avec second membre

On considère l'EDL1 à coefficients constants avec second membre :

$$(\mathcal{E}) : x'(t) = a(x(t)) + b(t)$$

avec $a \in \mathcal{L}(F)$ et $b : I \longrightarrow F$ continue.

L'équation $(\mathcal{E})$ équivaut à l'équation matricielle

$$(E) : X'(t) = A.X(t) + B(t)$$

où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$.

Théorème 1.3 (résolution de $(\mathcal{E})$ et le $(\mathcal{PC})$ associé à $(\mathcal{E})$).

- 1 Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les applications

$$x : t \mapsto e^{ta}(c) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a}(b(s))ds$$

où $(t_0, c) \in I \times F$.

- 2 Soit $(t_0, x_0) \in I \times F$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) : \begin{cases} x'(t) &= a(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

est donnée par $\forall t \in I, x(t) = e^{(t-t_0)a}(x_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a}(b(s))ds$.

Corollaire 1.2 (résolution de (E) et le $(\mathcal{PC})$ associé à (E)).

- 1 Les solutions de (E) sont les applications

$$X : t \mapsto e^{tA} . C + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} . B(s) ds$$

où $(t_0, C) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- 2 Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) : \begin{cases} X'(t) &= A.X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

est donnée par $\forall t \in I, X(t) = e^{(t-t_0)A} . X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} . B(s) ds$.



Résoudre sur $\mathbb{R}$, le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + e^t \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) + e^{2t} \\ x_3'(t) &= -x_1(t) + x_2(t) - e^t \end{cases}.$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -e^t \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$X'(t) = A.X(t) + B(t).$$



$\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$. Les sous-espaces propres de A sont :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{=v_2} \right) \text{ et } E_2(A) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right).$$

Notons

$$\varphi_1(t) = e^t \cdot v_1, \quad \varphi_2(t) = e^t \cdot v_2, \quad \varphi_3(t) = e^{2t} \cdot v_3.$$

La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme un s.f.s de l'équation homogène $X'(t) = A.X(t)$.



La solution de l'équation homogène $X'(t) = A.X(t)$ est donc

$$X(t) = \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} + \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}}_{=\varphi_2(t)} + \lambda_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}}_{=\varphi_3(t)}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Cherchons une solution particulière φ de l'équation

$$X'(t) = A.X(t) + B(t)$$

sous la forme

$$\varphi : t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t) + \lambda_3(t)\varphi_3(t).$$



La méthode de variation des constantes montre que les fonctions $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda'_1(t) e^t - \lambda'_2(t) e^t - \lambda'_3(t) e^{2t} & = e^t \\ \lambda'_1(t) e^t + \lambda'_3(t) e^{2t} & = e^{2t} \\ \lambda'_2(t) e^t + \lambda'_3(t) e^{2t} & = -e^t \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda'_1(t) & = 0 \\ \lambda'_2(t) & = -1 - e^t \\ \lambda'_3(t) & = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda_1(t) & = 0 \\ \lambda_2(t) & = -t - e^t \\ \lambda_3(t) & = t \end{cases}$$



par suite

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t e^t + (1-t) e^{2t} \\ t e^{2t} \\ (t-1) e^{2t} - t e^t \end{pmatrix}.$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1(t) &= t e^t + (1-t) e^{2t} &+ \lambda_1 e^t - \lambda_2 e^t - \lambda_3 e^{2t} \\ x_2(t) &= t e^{2t} &+ \lambda_1 e^t + \lambda_3 e^{2t} \\ x_3(t) &= (t-1) e^{2t} - t e^t &+ \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t} \end{cases}$$

avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Cas des EDL1 scalaires (rappel MPSI)

On étudie l'équation

$$(\star) : x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$

avec $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues.

- La solution générale de l'équation homogène $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ est

$$x_h : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)} \quad \text{où } A \text{ une primitive de } a \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

- On peut trouver une solution particulière de $(\star)$ sur I sous la forme $x_p(t) = \lambda(t) e^{-A(t)}$ avec $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction dérivable vérifie :

$$\lambda'(t) e^{-A(t)} = b(t).$$

- La solution générale de $(\star)$ sur I est $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Plan

- 1 EDL1 vectorielles
- 2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n
- 3 Problèmes de raccordement

Définition 2.1 (équation scalaire d'ordre n).

- 1 On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** définie sur I toute équation de la forme

$$(\mathcal{E}') : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, et d'inconnue $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction n fois dérivable.

- 2 On appelle **EDL scalaire homogène associée à $(\mathcal{E}')$** , l'équation

$$(\mathcal{E}'_0) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

- 3 On appelle **solution de $(\mathcal{E}')$** toute fonction n -fois dérivable vérifie¹ l'équation $(\mathcal{E}')$.

¹Une telle solution est de classe $\mathcal{C}^n$.

Traduction matricielle

Pour tout $t \in I$, notons : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0(t) & \dots & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

et

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$



$(\mathcal{E}')$ équivaut à

$$(E') : X'(t) = A(t).X(t) + B(t)$$

et $(\mathcal{E}'_0)$ équivaut à

$$(E'_0) : X'(t) = A(t).X(t).$$

Une fonction $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable est solution de $(\mathcal{E}')$ si, et seulement si, x est le premier élément d'un tuple $(x_1, \dots, x_n)$ solution du système différentiel

$$\begin{cases} x'_1 &= & x_2 \\ x'_2 &= & x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ x'_n &= & a_{n-1}(t)x_n + \dots + a_1(t)x_2 + a_0(t)x_1 + b(t) \end{cases}$$

Théorème 2.1 (théorème de Cauchy linéaire).

Si $a_0, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I alors, pour tout $(t_0, (x_0, \dots, x_{n-1})) \in I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy¹

$$(\mathcal{PC}') : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x^{(k)}(t_0) = x_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

admet une **unique** solution définie sur I .

¹Quand on considère un problème de Cauchy, il est **essentiel** de prendre toutes les dérivées au même point.



1 Soient φ et ψ deux solutions de $(\mathcal{E}')$ définies sur I .

Si

$$\exists t_0 \in I, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varphi^{(k)}(t_0) = \psi^{(k)}(t_0)$$

alors

$$\forall t \in I, \varphi(t) = \psi(t).$$

2 Toute solution non nulle de $(\mathcal{E}'_0)$ ne s'annule en aucun point de I .

Proposition 2.1 (structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}')$).

- 1 L'ensemble, $S_{\mathcal{E}'_0}$, des solutions de $(\mathcal{E}'_0)$ sur I est un sev de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- 2 Soit $t_0 \in I$ fixé. L'application

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0} : S_{\mathcal{E}'_0} &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'ev. En particulier, $\dim S_{\mathcal{E}'_0} = n$.

- 3 L'ensemble, $S_{\mathcal{E}'}$, des solutions de $(\mathcal{E}')$ sur I est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction $S_{\mathcal{E}'_0}$:

$$S_{\mathcal{E}'} = \varphi + S_{\mathcal{E}'_0} = \left\{ \varphi + \varphi_0, \varphi_0 \in S_{\mathcal{E}'_0} \right\}$$

où φ une solution particulière de $(\mathcal{E}')$

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 (EDL2)

On étudie l'ensemble S_2 des solutions de l'EDL2 scalaires :

$$(E_2) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

avec $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues et d'inconnue $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction deux fois dérivable.

Définition 2.2 (Wronskien dans le cas scalaire).

Soit (φ_1, φ_2) deux solutions de l'équation homogène associée à (E_2) . On appelle **Wronskien** de (φ_1, φ_2) l'application définie par :

$$\forall t \in I, \quad W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Proposition 2.2 (W est solution d'une EDL1).

Le wronskien W d'un couple de solutions de l'équation homogène associée à (E_2) vérifie

$$W'(t) = a(t)W(t) .$$



Le wronskien d'un couple de solutions de l'équation

$$x'' + q(t)x = 0$$

est constant.

Proposition 2.3 (Wronskien vs s.f.s).

Soit φ_1, φ_2 deux solutions de l'équation homogène associée à (E_2) . On a équivalence entre :

- 1** (φ_1, φ_2) est un s.f.s de l'équation homogène associée à (E_2) ;
- 2** $\forall t \in I, W(t) \neq 0$;
- 3** $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$.

Proposition 2.4 (méthode de variation des constantes cas scalaire).

Si (φ_1, φ_2) est un s.f.s de l'équation homogène associée à (E_2) , on peut trouver une solution particulière sur I de (E_2) sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)\varphi_1(t) + \mu(t)\varphi_2(t)$$

avec $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonctions dérivables vérifiant¹ :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi_1(t) + \mu'(t)\varphi_2(t) &= 0 \\ \lambda'(t)\varphi_1'(t) + \mu'(t)\varphi_2'(t) &= c(t) \end{cases}$$

¹ce système est de Cramer et détermine $(\lambda'(t), \mu'(t))$ de façon unique.



Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t^2}.$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière φ de l'équation sous la forme

$$\varphi : t \mapsto \lambda(t) e^{-t} + \mu(t) t e^{-t}.$$

La méthode de variation des constantes montre que les fonctions λ et μ sont solutions de :



$$\begin{cases} \lambda'(t) e^{-t} + t\mu'(t) e^{-t} & = 0 \\ -\lambda'(t) e^{-t} + (1-t)\mu'(t) e^{-t} & = \frac{e^{-t}}{1+t^2} \end{cases}$$

Soit $\lambda'(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \text{ et } \lambda_2(t) = \arctan(t).$$

La solution générale de l'équation est

$$t \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) e^{-t} + t \arctan(t) e^{-t} + (\lambda + \mu t) e^{-t}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cas des EDL2 scalaires homogènes à coefficients constants (rappel MPSI)

On étudie l'équation

$$(\star) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$$

avec $a, b \in \mathbb{K}$.

L'équation caractéristique associée à $(\star)$ est

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Notons Δ son discriminant.

- $\Delta \neq 0$: deux solutions α, β de l'équation caractéristique. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{\beta t}$ sont solutions de $(\star)$. De plus $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$. Donc (φ_1, φ_2) forme un s.f.s de $(\star)$. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- $\Delta = 0$: une solution double α de l'équation caractéristique. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto t e^{\alpha t}$ sont solutions de $(\star)$. De plus $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de $(\star)$. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- $\Delta > 0$: deux solutions α, β de l'équation caractéristique. La solution générale de $(*)$ est alors $t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\Delta = 0$: une solution double α de l'équation caractéristique. La solution générale de $(*)$ est alors $t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{\alpha t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $\Delta < 0$: deux solutions conjuguées $\alpha \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$ de l'équation caractéristique. La fonction $t \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ est solution complexe de $(*)$ donc ses parties réelle et imaginaire $\varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t)$ sont solutions réelles de $(*)$. De plus $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \omega \end{vmatrix} = \omega \neq 0$. Donc (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de $(*)$. La solution générale de $(*)$ est alors $t \mapsto (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) e^{\alpha t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Recherche de solutions développables en série entière

On peut rechercher des solutions d'une EDL scalaire à coefficients **polynomiaux** sous forme de fonctions développables en séries entières.



Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation

$$(\star) : t(t-1)x'' + 3tx' + x = 0.$$

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S est définie et de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et, pour tout $t \in] -R, R[$

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \quad S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$$



$$\text{et } S''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^{n-1}.$$

On injecte ces expressions dans $(\star)$:

$$t(t-1)S''(t) + 3tS'(t) + S(t)$$

$$= t^2S''(t) - tS''(t) + 3tS'(t) + S(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 3na_n + a_n)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - (n+1)na_{n+1})t^n.$$



L'unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que S est solution de $(*)$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_n = (n+1) n a_{n+1},$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.

Ainsi, les solutions développables en série entière de $(*)$ sont les applications

$$t \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = \frac{\lambda t}{(1-t)^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Plan

- 1 EDL1 vectorielles
- 2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n
- 3 Problèmes de raccordement

Cas des EDL1 non normalisées

Soit l'EDL1 :

$$a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

où $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, mais a est susceptible de ***s'annuler sur*** I .



Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1-t)x' - x = t.$$

Sur $I =]1, +\infty[$ ou $]-\infty, 1[$, on a :

$$(1-t)x' - x = t \iff x' = \frac{1}{1-t}x + \frac{t}{1-t}.$$

C'est une EDL1. La solution générale sur I est

$$x : t \longmapsto \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$



Soit $x : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$, donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad x(t) = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}$$

et

$$\forall t \in]-\infty, 1[, \quad x(t) = \frac{\mu}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}.$$

Continuité en 1 : on a

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^+]{} \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \neq -1/2 \\ -1 & \text{si } \lambda = -1/2 \end{cases}$$

et

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \begin{cases} \infty & \text{si } \mu \neq -1/2 \\ -1 & \text{si } \mu = -1/2 \end{cases}.$$



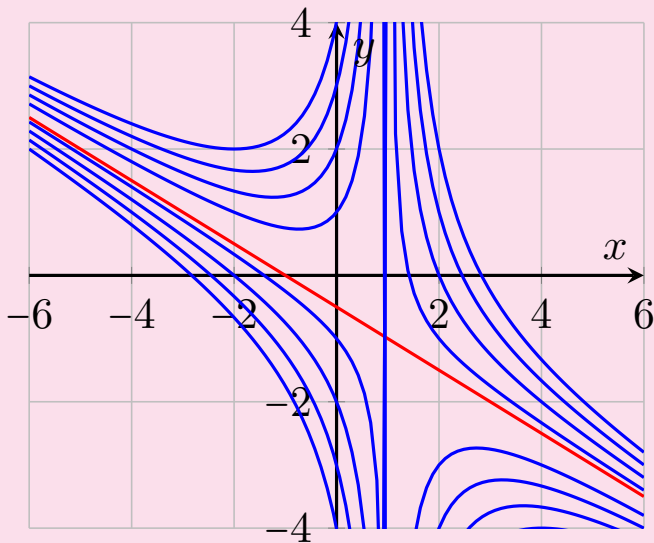
Le prolongement en 1 est possible si, et seulement si, $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ avec $x(1) = -1$.

Dérivabilité en 1 : Le prolongement en 1 est dérivable en 1.

Équation différentielle en 1 : $0 \times x'(1) - x(1) = 1$.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est

$$x : t \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}.$$



Cas des EDL2 non normalisées

Soit l'EDL2 :

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$$

où $a, b, c, d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, mais a est susceptible de ***s'annuler sur*** I .

La démarche est la même, cependant les raccords aux points où a s'annule s'obtiennent en étudiant la dérivabilité jusqu'à l'ordre 2.

*Merci
pour votre
attention!*