

Équations différentielles linéaires

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

1	EDL1 vectorielles	1
2	Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n	5
3	Problèmes de raccordement	8

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et F un espace normé de dimension finie.

1 EDL1 vectorielles

Soit $n = \dim F$ et $\mathcal{B}$ une base de F .

Généralités

Définition 1.1.

équation linéaires vectorielles du premier ordre

1. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1 (EDL1) vectorielle*, toute équation de la forme

$$(\mathcal{E}) : x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$$

d'inconnue $x : I \rightarrow F$ où $a : I \rightarrow \mathcal{L}(F)$ et $b : I \rightarrow F$.

2. On appelle *EDL homogène associée à $(\mathcal{E})$* , l'équation $(\mathcal{E}_0) : x'(t) = a(t)(x(t))$.

3. On appelle *solution de $(\mathcal{E})$* toute fonction dérivable et vérifie l'équation $(\mathcal{E})$.

Remarque 1.1 (Traduction matricielle).

■ Posons : $X(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b(t)) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

• L'équation vectorielle $(\mathcal{E})$ équivaut à l'équation matricielle $(E) : X'(t) = A(t).X(t) + B(t)$.

• Si on note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. Alors l'équation $(\mathcal{E})$ équivaut au

système différentiel
$$\begin{cases} x'_1(t) &= a_{1,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ x'_n(t) &= a_{n,1}(t)x_1(t) + \dots + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Théorème 1.1.**théorème de Cauchy linéaire**

Si $a : I \rightarrow \mathcal{L}(F)$ et $b : I \rightarrow F$ sont continues sur I alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times F$, le problème de Cauchy

$$(\mathcal{PC}) : \begin{cases} x'(t) &= a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution φ définie sur I et vérifie : $\forall t \in I, \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)(\varphi(s)) + b(s)) ds$.

Remarque 1.2. ■ Soient φ et ψ deux solutions de $(\mathcal{E})$ définies sur I . $\exists t_0 \in I, \varphi(t_0) = \psi(t_0) \implies \forall t \in I, \varphi(t) = \psi(t)$.

■ Toute solution non nulle de $(\mathcal{E}_0)$ ne s'annule en aucun point de I .

Proposition 1.1.**structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$**

1. L'ensemble, $S_{\mathcal{E}_0}$, des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur I est un sev de $\mathcal{C}^1(I, F)$.
2. Soit $t_0 \in I$ fixé. $\Phi_{t_0} : S_{\mathcal{E}_0} \rightarrow F$ est un isomorphisme d'ev. En particulier, $\dim S_{\mathcal{E}_0} = \dim F$.
 $x \mapsto x(t_0)$
3. L'ensemble, $S_{\mathcal{E}}$, des solutions de $(\mathcal{E})$ sur I est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, F)$ de direction $S_{\mathcal{E}_0}$:

$$S_{\mathcal{E}} = \varphi + S_{\mathcal{E}_0} = \{ \varphi + \varphi_0, \varphi_0 \in S_{\mathcal{E}_0} \} \quad \text{où } \varphi \text{ une solution particulière de } (\mathcal{E}).$$

Définition 1.2.**système fondamental de solutions de $S_{\mathcal{E}_0}$**

On appelle **système fondamental de solutions** (s.f.s) de $\mathcal{E}_0$ toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $S_{\mathcal{E}_0}$.

Proposition 1.2.**méthode de variation des constantes**

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un s.f.s de $S_{\mathcal{E}_0}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur I . On a équivalence entre :

- (i) $\varphi : t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \varphi_i(t)$ solution de $(\mathcal{E})$; (ii) $\forall t \in I, \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t) \varphi_i(t) = b(t)$.

Résolution de l'EDL1 homogène à coefficients constants

Soit $a \in \mathcal{L}(F)$. On considère l'EDL1 homogène à coefficients constants : $(\mathcal{E}_0) : x'(t) = a(x(t))$.

$(\mathcal{E}_0)$ équivaut à l'équation matricielle $(E_0) : X'(t) = A.X(t)$ où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$.

Théorème 1.2.**résolution de $(\mathcal{E}_0)$ et le $(\mathcal{PC})$ associé à $(\mathcal{E}_0)$**

1. Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les applications $x : t \mapsto e^{ta}(c)$ où $c \in F$.
2. Soit $(t_0, x_0) \in I \times F$. L'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{PC}) : \begin{cases} x'(t) &= a(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$ est donnée par

$$\forall t \in I, x(t) = e^{(t-t_0)a}(x_0).$$

Corollaire 1.1.**résolution de (E_0) et le $(\mathcal{PC})$ associé à (E_0)**

1. Les solutions de (E_0) sont les applications $X : t \mapsto e^{tA}.C$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{PC}) : \begin{cases} X'(t) &= A.X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$ est donnée par $\forall t \in I, X(t) = e^{(t-t_0)A}.X_0$.

Exemple 1.1.

■ Résoudre sur $\mathbb{R}$, le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$ avec $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ et $x_3(0) = 0$.

• On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\begin{cases} X'(t) = A.X(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$.

• A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

• $\exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} & 2e^t - e^{2t} \end{pmatrix}$.

• L'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} X'(t) = A.X(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ est $X : t \mapsto \exp(tA).X_0 = \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} \end{pmatrix}$.

D'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x_1(t) = e^t - e^{2t} \\ x_2(t) = e^{2t} \\ x_3(t) = -e^t + e^{2t} \end{cases}$.

Résolution de l'EDL1 à coefficients constants avec second membre

On considère l'EDL1 à coefficients constants avec second membre :

$$(\mathcal{E}) : x'(t) = a(x(t)) + b(t)$$

avec $a \in \mathcal{L}(F)$ et $b : I \longrightarrow F$ continue. L'équation $(\mathcal{E})$ équivaut à l'équation matricielle

$$(E) : X'(t) = A.X(t) + B(t) \quad \text{où } X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) \text{ et } B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b).$$

Théorème 1.3.

résolution de $(\mathcal{E})$ et le $(\mathcal{PC})$ associé à $(\mathcal{E})$

1. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les applications $x : t \mapsto e^{ta}(c) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a}(b(s))ds$ où $(t_0, c) \in I \times F$.

2. Soit $(t_0, x_0) \in I \times F$. L'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{PC}) : \begin{cases} x'(t) = a(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est

donnée par $\forall t \in I, x(t) = e^{(t-t_0)a}(x_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a}(b(s))ds$.

Corollaire 1.2.

résolution de (E) et le $(\mathcal{PC})$ associé à (E)

1. Les solutions de (E) sont les applications $X : t \mapsto e^{tA}.C + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}.B(s)ds$ où $(t_0, C) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2. Soit $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{PC}) : \begin{cases} X'(t) = A.X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

est donnée par $\forall t \in I, X(t) = e^{(t-t_0)A}.X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}.B(s)ds$.

Exemple 1.2.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$, le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + e^t \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) + e^{2t} \\ x_3'(t) = -x_1(t) + x_2(t) - e^t \end{cases}$.

- On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -e^t \end{pmatrix}$ de sorte que $X'(t) = A.X(t) + B(t)$.
- $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$. Les sous-espaces propres de A sont :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right) \text{ et } E_2(A) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right).$$

Notons $\varphi_1(t) = e^t.v_1$, $\varphi_2(t) = e^t.v_2$, $\varphi_3(t) = e^{2t}.v_3$. La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme un s.f.s de l'équation homogène $X'(t) = A.X(t)$. La solution de l'équation homogène $X'(t) = A.X(t)$ est donc

$$X(t) = \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} + \underbrace{\lambda_2 \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}}_{=\varphi_2(t)} + \underbrace{\lambda_3 \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}}_{=\varphi_3(t)}, \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- Cherchons une solution particulière φ de l'équation $X'(t) = A.X(t) + B(t)$ sous la forme

$$\varphi : t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t) + \lambda_3(t)\varphi_3(t).$$

La méthode de variation des constantes montre que les fonctions $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)e^t - \lambda_2'(t)e^t - \lambda_3'(t)e^{2t} = e^t \\ \lambda_1'(t)e^t + \lambda_3'(t)e^{2t} = e^{2t} \\ \lambda_2'(t)e^t + \lambda_3'(t)e^{2t} = -e^t \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \lambda_1'(t) = 0 \\ \lambda_2'(t) = -1 - e^t \\ \lambda_3'(t) = 1 \end{cases} \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \lambda_1(t) = 0 \\ \lambda_2(t) = -t - e^t \\ \lambda_3(t) = t \end{cases} \text{ par suite } \varphi(t) = \begin{pmatrix} t e^t + (1-t) e^{2t} \\ t e^{2t} \\ (t-1) e^{2t} - t e^t \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) = t e^t + (1-t) e^{2t} + \lambda_1 e^t - \lambda_2 e^t - \lambda_3 e^{2t} \\ x_2(t) = t e^{2t} + \lambda_1 e^t + \lambda_3 e^{2t} \\ x_3(t) = (t-1) e^{2t} - t e^t + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t} \end{cases} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Cas des EDL1 scalaires (rappel MPSI)

On étudie l'équation $(\star) : x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues.

- La solution générale de l'équation homogène $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ est

$$x_h : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \text{ où } A \text{ une primitive de } a \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}.$$

- On peut trouver une solution particulière de $(\star)$ sur I sous la forme $x_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ avec $\lambda : I \rightarrow \mathbb{K}$ fonction dérivable vérifie : $\lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)$.
- La solution générale de $(\star)$ sur I est $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

Généralités

Définition 2.1.

équation scalaire d'ordre n

1. On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n** définie sur I toute équation de la forme

$$(\mathcal{E}') : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

avec $a_0, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, et d'inconnue $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction n fois dérivable.

2. On appelle **EDL scalaire homogène associée à $(\mathcal{E}')$** , l'équation

$$(\mathcal{E}'_0) : x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$$

3. On appelle **solution de $(\mathcal{E}')$** toute fonction n -fois dérivable vérifie¹ l'équation $(\mathcal{E}')$.

1. Une telle solution est de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarque 2.1 (Traduction matricielle).

■ Pour tout $t \in I$, notons :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0(t) & \dots & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

• $(\mathcal{E}')$ équivaut à $(E') : X'(t) = A(t).X(t) + B(t)$ et $(\mathcal{E}'_0)$ équivaut à $(E'_0) : X'(t) = A(t).X(t)$.

■ Une fonction $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable est solution de $(\mathcal{E}')$ si, et seulement si, x est le premier élément d'un tuple

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ solution du système différentiel } \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_n = a_{n-1}(t)x_n + \dots + a_1(t)x_2 + a_0(t)x_1 + b(t) \end{cases}$$

Théorème 2.1.

théorème de Cauchy linéaire

Si $a_0, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont continues sur I alors, pour tout $(t_0, (x_0, \dots, x_{n-1})) \in I \times \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy¹

$$(\mathcal{PC}') : \begin{cases} x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t) \\ x^{(k)}(t_0) = x_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \end{cases}$$

admet une **unique** solution définie sur I .

1. Quand on considère un problème de Cauchy, il est **essentiel** de prendre toutes les dérivées au même point.

Remarque 2.2. ■ Soient φ et ψ deux solutions de $(\mathcal{E}')$ définies sur I . Alors

$$\exists t_0 \in I, \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varphi^{(k)}(t_0) = \psi^{(k)}(t_0) \implies \forall t \in I, \varphi(t) = \psi(t).$$

■ Toute solution non nulle de $(\mathcal{E}'_0)$ ne s'annule en aucun point de I .

Proposition 2.1.**structure de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}')$**

1. L'ensemble, $S_{\mathcal{E}'_0}$, des solutions de $(\mathcal{E}'_0)$ sur I est un sev de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
2. Soit $t_0 \in I$ fixé. $\Phi_{t_0} : S_{\mathcal{E}'_0} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme d'ev.

$$x \longmapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$$

En particulier, $\dim S_{\mathcal{E}'_0} = n$.
3. L'ensemble, $S_{\mathcal{E}'}$, des solutions de $(\mathcal{E}')$ sur I est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction $S_{\mathcal{E}'_0}$:

$$S_{\mathcal{E}'} = \varphi + S_{\mathcal{E}'_0} = \left\{ \varphi + \varphi_0, \varphi_0 \in S_{\mathcal{E}'_0} \right\} \quad \text{où } \varphi \text{ une solution particulière de } (\mathcal{E}').$$

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 (EDL2)

On étudie l'ensemble S_2 des solutions de l'EDL2 scalaires :

$$(E_2) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$$

avec $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues et d'inconnue $x : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonction deux fois dérivable.

Définition 2.2.**Wronskien dans le cas scalaire**

Soit (φ_1, φ_2) deux solutions de l'équation homogène associée à (E_2) . On appelle **Wronskien** de (φ_1, φ_2)

l'application définie par :

$$\forall t \in I, \quad W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}.$$
Proposition 2.2. **W est solution d'une EDL1**

Le wronskien W d'un couple de solutions de l'équation homogène associée à (E_2) vérifie $W'(t) = a(t)W(t)$.

Exemple 2.1. ■ Le wronskien d'un couple de solutions de l'équation $x'' + q(t)x = 0$ est constant.

Proposition 2.3.**Wronskien vs s.f.s**

Soit φ_1, φ_2 deux solutions de l'équation homogène associée à (E_2) . On a équivalence entre :

- (i) (φ_1, φ_2) est un s.f.s de l'équation homogène associée à (E_2) ;
- (ii) $\forall t \in I, \quad W(t) \neq 0$;
- (iii) $\exists t_0 \in I, \quad W(t_0) \neq 0$.

Proposition 2.4.**méthode de variation des constantes cas scalaire**

Si (φ_1, φ_2) est un s.f.s de l'équation homogène associée à (E_2) , on peut trouver une solution particulière sur I de (E_2) sous la forme $x(t) = \lambda(t)\varphi_1(t) + \mu(t)\varphi_2(t)$ avec $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonctions dérivables vérifiant¹ :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\varphi_1(t) + \mu'(t)\varphi_2(t) &= 0 \\ \lambda'(t)\varphi_1'(t) + \mu'(t)\varphi_2'(t) &= c(t) \end{cases}$$

1. ce système est de Cramer et détermine $(\lambda'(t), \mu'(t))$ de façon unique.

Exemple 2.2. ■ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t^2}$.

- La solution générale de l'équation homogène est $t \longmapsto \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Cherchons une solution particulière φ de l'équation sous la forme : $\varphi : t \mapsto \lambda(t)e^{-t} + \mu(t)te^{-t}$.

La méthode de variation des constantes montre que les fonctions λ et μ sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda'(t)e^{-t} + t\mu'(t)e^{-t} &= 0 \\ -\lambda'(t)e^{-t} + (1-t)\mu'(t)e^{-t} &= \frac{e^{-t}}{1+t^2} \end{cases}$$

Soit $\lambda'(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ et $\lambda_2(t) = \arctan(t)$.

La solution générale de l'équation est $t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-t} + t\arctan(t)e^{-t} + (\lambda + \mu t)e^{-t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cas des EDL2 scalaires homogènes à coefficients constants (rappel MPSI)

On étudie l'équation $(\star) : x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$ avec $a, b \in \mathbb{K}$.

- L'équation caractéristique associée à $(\star)$ est $r^2 + ar + b = 0$. Notons Δ son discriminant.

- Cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- $\Delta \neq 0$: deux solutions α, β de l'équation caractéristique. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{\beta t}$ sont solutions de $(\star)$. De plus $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta - \alpha \neq 0$. Donc (φ_1, φ_2) forme un s.f.s de $(\star)$. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- $\Delta = 0$: une solution double α de l'équation caractéristique. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto te^{\alpha t}$ sont solutions de $(\star)$. De plus $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de $(\star)$. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

- Cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- $\Delta > 0$: deux solutions α, β de l'équation caractéristique. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta = 0$: une solution double α de l'équation caractéristique. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta < 0$: deux solutions conjuguées $\alpha \pm i\omega$ avec $\omega \neq 0$ de l'équation caractéristique. La fonction $t \mapsto e^{(\alpha+i\omega)t}$ est solution complexe de $(\star)$ donc ses parties réelle et imaginaire $\varphi_1 : t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t)$ sont solutions réelles de $(\star)$. De plus $W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \omega \end{vmatrix} = \omega \neq 0$. Donc (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de $(\star)$. La solution générale de $(\star)$ est alors

$$t \mapsto (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))e^{\alpha t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Recherche de solutions développables en série entière

On peut rechercher des solutions d'une EDL scalaire à coefficients **polynomiaux** sous forme de fonctions développables en séries entières.

Exemple 2.3. ■ Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation $(\star) : t(t-1)x'' + 3tx' + x = 0$.

- Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $t \in] -R, R[$

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \quad S'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}, \quad S''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} t^{n-1}.$$

On injecte ces expressions dans $(*)$:

$$\begin{aligned} t(t-1)S''(t) + 3tS'(t) + S(t) &= t^2 S''(t) - tS''(t) + 3tS'(t) + S(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} t^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) a_n - (n+1) n a_{n+1} + 3n a_n + a_n) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - (n+1) n a_{n+1}) t^n \end{aligned}$$

- L'unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que S est solution de $(*)$ si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n = (n+1) n a_{n+1}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n a_{n+1}$.

Ainsi, les solutions développables en série entière de $(*)$ sont les applications $t \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} n t^n = \frac{\lambda t}{(1-t)^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 Problèmes de raccordement

Cas des EDL1 non normalisées

Soit l'EDL1 : $\boxed{a(t)x' + b(t)x = c(t)}$ où $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, mais a est susceptible de **s'annuler sur I** .

Exemple 3.1. ■ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1-t)x' - x = t$.

- Sur $I =]1, +\infty[$ ou $]-\infty, 1[$, on a $(1-t)x' - x = t \iff x' = \frac{1}{1-t}x + \frac{t}{1-t}$. C'est une EDL1. La solution générale sur I est

$$x : t \mapsto \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Soit $x : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$, donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad x(t) = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \quad \text{et} \quad \forall t \in]-\infty, 1[, \quad x(t) = \frac{\mu}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}.$$

- Régularité de la solution sur $\mathbb{R}$:

- Continuité en 1 : $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \neq -1/2 \\ -1 & \text{si } \lambda = -1/2 \end{cases}$ et $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} \begin{cases} \infty & \text{si } \mu \neq -1/2 \\ -1 & \text{si } \mu = -1/2 \end{cases}$.

Le prolongement en 1 est possible si, et seulement si, $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ avec $x(1) = -1$.

- Dérivabilité en 1 : Le prolongement en 1 est dérivable en 1.
- Équation différentielle en 1 : $0 \times x'(1) - x(1) = 1$.
- La solution générale sur $\mathbb{R}$ est $x : t \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$.

Cas des EDL2 non normalisées

Soit l'EDL2 : $\boxed{a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)}$ où $a, b, c, d : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, mais a est susceptible de **s'annuler sur I** .

La démarche est la même, cependant les raccords aux points où a s'annule s'obtiennent en étudiant la dérivabilité jusqu'à l'ordre 2.