Chapitre 9

Intégrales dépendant d'un paramètre

M. BINYZE

https://supspé.com

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

Plan

Suites et séries d'intégrales

Dans ce chapitre est sauf indication contraire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I, J désignent des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1 (théorème de convergence dominée(TCD)).

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est cpm sur I,*
2. $(f_n)_n$ *converge simplement sur I vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm,*
3. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur I vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ \ |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$ ***(hypothèse de domination)***

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t}.$$

Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\quad f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^n}$.

- $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ \mathrm{e}^{-1} & \text{si} \quad t = 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} \quad ;$$
- les fonctions f_n et f sont cpm sur $\mathbb{R}^+$;
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ où
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$
est, positive cpm et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après TCD, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

Corollaire 1.1 (extension du théorème de convergence dominée).

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une application et* a *un point*[1] *adhérent à* J . *Si*

1. $\forall x \in J,\ t \longmapsto f(x,t)$ *est cpm sur* I *et* $\forall t \in I,\ f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$ *avec* ℓ *cpm sur* I,
2. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur* I *vérifiant :*

$$\forall (x,t) \in J \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$ *(**hypothèse de domination**)*

Alors les fonctions $t \longmapsto f(x,t)$ *et* ℓ *sont intégrables sur* I *et*

$$\boxed{\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\mathrm{d}t}.$$

[1] a peut être aussi une extrémité infinie de J lorsque J est un intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

Pratique

L'hypothède de domination peut-être remplacée par ***"l'hypothèse de domination locale"*** : il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a inclus dans J et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x,t) \in \mathcal{V}_a \times I, \ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Théorème 1.2 (intégration terme à terme).

Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions de* I *vers* $\mathbb{K}$. *Si*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est cpm et intégrable sur* I,
2. *La série* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *et de somme cpm sur* I,
3. *La série numérique* $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ *converge.*

Alors la somme $t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ *est intégrable sur* I *et*

$$\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \right) \mathrm{d}t}.$$

Établir l'identité $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pour tout $t \in]0,1[$, on a :

$$\frac{\ln t}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(t)t^n.$$

On pose alors $f_n(t) = -\ln(t)t^n$. On a

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est cpm et intégrable sur $]0,1[$ puisque
$$\sqrt{t} f_n(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \text{ et } f_n(t) \xrightarrow[t \to 1^-]{} 0;$$
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme $t \longmapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est cpm sur $]0,1[$;

- La série numérique $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge puisque

$$\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 -\ln(t)t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge (série de Riemann).

Par le théorème d'intégration terme à terme, $t \longmapsto \frac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Plan

Continuité

Ici, X désigne une partie d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 2.1 (continuité locale).

Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $x_0 \in X$. Si

1. $\forall t \in I,\ \ x \longmapsto f(x,t)$ *est continue en* x_0 *et* $\forall x \in X,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ *est cpm sur* I,
2. $\exists \mathcal{V}_{x_0} \subset X$ *un voisinage de* a *et* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur* I *vérifiant :*

$$\forall (x,t) \in \mathcal{V}_{x_0} \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$ ***(hypothèse de domination)***

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ *est définie sur* $\mathcal{V}_{x_0}$ *et continue en* x_0.

Théorème 2.2 (continuité globale).

Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une application. Si*

1. $\forall t \in I,\ \ x \longmapsto f(x,t)$ *est continue sur* X *et* $\forall x \in X,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ *est cpm sur* I*,*
2. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur* I *vérifiant :*
$$\forall (x,t) \in X \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$ ***(hypothèse de domination)***

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur* X*.*

Pratique

1. L'hypothède de domination peut-être remplacée par ***"l'hypothèse de domination locale"*** : pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :
$$\forall (x,t) \in K \times I, \ \ |f(x,t)| \leq \varphi_K(t).$$
2. Lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut remplacer le compact K par un segment $[a,b] \subset X$.

Continuité de $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$ sur $]0,+\infty[$.

On pose pour tout $(x,t) \in\,]0,+\infty[\, \times [0,+\infty[\,,\quad f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$.

On a :

- $\forall t \in [0,+\infty[\,,\quad x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in\,]0,+\infty[\,,\quad t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur $[0,+\infty[$;
- Soit $[a,b] \subset\,]0,+\infty[$. On a

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[\,,\quad |f(x,t)| \leq \frac{\mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{1+t}} = \varphi(t)$$

  qui est, positive, cpm et intégrable sur $[0,+\infty[$ car

$$t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

D'après le théorème de continuité, la fonction g est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Dérivabilité

Théorème 2.3 (caractère $\mathcal{C}^1$).

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable par rapport à x. Si

1. $\forall x \in J,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ *est cpm et intégrables sur* I,
2. $\forall t \in I,\ x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue sur* J *et* $\forall x \in J,\ t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est cpm sur* I,
3. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur* I *vérifiant :*

$$\forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$ ***(hypothèse de domination)***

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et on a la formule de Leibniz suivante :

$$\boxed{\forall x \in J,\ \ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t}.$$

Pratique

L'hypothède de domination peut-être remplacée par ***"l'hypothèse de domination locale"*** :

pour tout $[a,b] \subset J$, il existe $\varphi_{a,b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t).$$

Soit $a > 0$. Expression simple de

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt - at^2} \, \mathrm{d}t.$$

On pose, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt - at^2}$. La fonction f est dérivable par rapport à x et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}t \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt - at^2}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrables sur $\mathbb{R}$ car
$$t^2 |f(x,t)| = t^2 \, \mathrm{e}^{-at^2} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0;$$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur $\mathbb{R}$;

- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = |t|\,\mathrm{e}^{-at^2}$ qui est, positive, cpm et intégrable sur $\mathbb{R}$ car
$$t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0.$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{-\mathrm{i}}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{i}x - 2a\mathrm{i}t - \mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-\mathrm{i}}{2a}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \mathrm{i}x\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t\right). \\
&= \frac{-x}{2a}g(x)
\end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle $g'(x) = \dfrac{-x}{2a} g(x)$ est

$$g(x) = g(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$$

avec

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{s=\sqrt{a}t}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}.$

Théorème 2.4 (caractère $\mathcal{C}^k,\ k \geq 2$).

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une application dérivable* k *fois par rapport à* x*. Si*

1. $\forall p \in [\![0, k-1]\!], \forall x \in J,\ \ t \longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ *est cpm et intégrables sur* I*,*
2. $\forall t \in I,\ x \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue sur* J *et*

   $\forall x \in J,\ t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est cpm sur* I*,*
3. *Pour tout* $[a,b] \subset J$*, il existe* $\varphi_{a,b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur* I *vérifiant :*

   $\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$. ***(hypothèse de domination locale)***

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* J *et on a la formule de Leibniz suivante :*

$$\boxed{\forall p \in [\![1, k]\!], \forall x \in J,\ \ g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\mathrm{d}t}.$$

Corollaire 2.1 (caractère $\mathcal{C}^\infty$).

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ *une application indéfiniment dérivable par rapport à* x. *Si*

1. $\forall x \in J,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ *est cpm et intégrables sur* I,
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I,\ x \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue sur* J *et*

   $\forall x \in J,\ t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est cpm sur* I,
3. *Pour tout* $[a,b] \subset J$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *cpm et intégrable sur* I *vérifiant :*

   $\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$. ***(hypothèse de domination locale)***

Alors la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* J *et on a la formule de Leibniz suivante :*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J,\ \ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t}.$$

Plan

Étude de la fonction Γ d'Euler

On appelle fonction Gamma la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
   la fonction $t \longmapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est cpm sur $]0,+\infty[$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad t^2 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
   et
   $$t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \text{ qui, est intégrable si, et seulement si, } x > 0.$$
   Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
   Par suite, Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

2 Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Introduisons, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,+\infty[\,,\ \ f(x,t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

- $\forall t \in]0,+\infty[\,,\ \ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et
  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur $]0,+\infty[$;
- soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\,,\ |f(x,t)| \begin{array}{cl} = & t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \\ = & \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t} \\ \leq & \varphi(t) \end{array}$$

  avec

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

  qui est, positive, cpm et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité, la fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

La fonction f est indéfiniment dérivable par rapport à x et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrables sur $]0,+\infty[$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,+\infty[\,, \ x \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et

  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est cpm sur $]0,+\infty[$;
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\,, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \leq \varphi_k(t)$$

avec

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k t^{a-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ |\ln t|^k t^{b-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

qui est, positive, cpm et intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque

$$1-\tfrac{a}{2}<1,\ \ t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_k(t)\xrightarrow[t\to 0^+]{}0,\quad \text{et}\quad t^2\varphi_k(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Alors la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \ \Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

4 $\forall x>0,\ \ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. En particulier,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ \Gamma(n+1)=n!\ \text{ et }\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

Soit $x>0$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{\left[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0}+x\int_0^{+\infty}t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots\times 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\ldots\times 1}{2^n(2n)(2n-2)\ldots\times 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underbrace{=}_{s=\sqrt{t}} 2\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s}_{=\sqrt{\pi}/2} = \sqrt{\pi}$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

5 Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\forall x > 0,\quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(\ln t)^2 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}}_{\text{positive et non identiquement nulle}}\,\mathrm{d}t > 0,$$

donc Γ est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

6 Variations de Γ.

La fonction Γ est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$ et $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que

$$\Gamma'(\alpha) = 0.$$

Or Γ' est strictement croissante, donc α est unique dans $]1, 2[$.

Comme la fonction Γ' est strictement croissante, alors[1]

$$\forall x \in]0, \alpha[\,,\ \Gamma'(x) < \Gamma'(\alpha) = 0$$

et

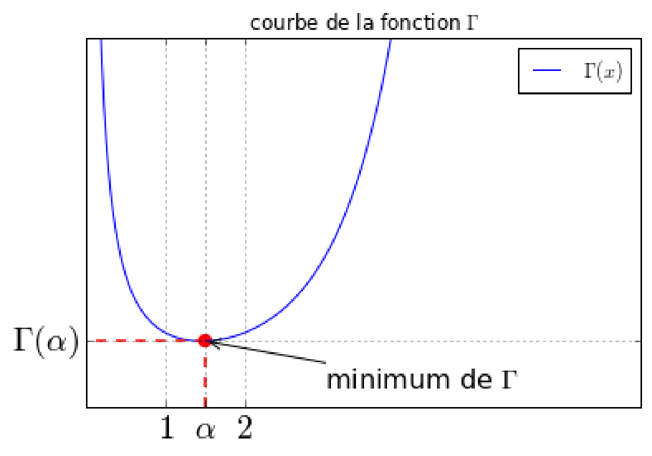
$$\forall x \in]\alpha, +\infty[\,,\ \Gamma'(x) > \Gamma'(\alpha) = 0.$$

[1] On peut aussi dire que, puisque Γ est convexe et que $\Gamma'(\alpha) = 0$, alors Γ admet un minimum global en α.

x	0		α		$+\infty$
$\Gamma'(x)$		$-$	0	$+$	
Γ	$+\infty$	$\searrow$	$\Gamma(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

7 $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

- Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Puisque Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors
$$\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \Gamma(1) = 1$$
et par suite, $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
- Γ étant croissante sur $[2, +\infty[$. Pour $x \geq 2$,
$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \geq (x-1)\Gamma(1) = x - 1$$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
- Soit $x > 1$. On a :
$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x} = \underbrace{\frac{(x-1)}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \Gamma(x-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$


courbe de la fonction Γ
$\Gamma(x)$
$\Gamma(\alpha)$
minimum de Γ
1
α
2

Merci pour votre attention!