Intégrales dépendant d'un paramètre

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

Dans ce chapitre est sauf indication contraire, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I, J désignent des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.

1 Suites et séries d'intégrales

Théorème 1.1. **théorème de convergence dominée(TCD)**

Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est cpm sur I,

2. $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ cpm,

3. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ \ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$. (***hypothèse de domination***)

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t}$.

Exemple 1.1. Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+,\ \ f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^n}$.

- $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1[\\ \mathrm{e}^{-1} & \text{si} \quad t = 1 \\ 0 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$;
- les fonctions f_n et f sont cpm sur $\mathbb{R}^+$;
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N},\ \ |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ où $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$ est, positive, cpm et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après TCD, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

Corollaire 1.1. **extension du théorème de convergence dominée**

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et a un point [1] adhérent à J . Si

1. $\forall x \in J,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur I et $\forall t \in I,\ \ f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$ avec ℓ cpm sur I,

2. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant : $\forall (x,t) \in J\times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$. (***hypothèse de domination***)

Alors les fonctions $t \longmapsto f(x,t)$ et ℓ sont intégrables sur I et $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\mathrm{d}t}$.

1. a peut être aussi une extrémité infinie de J lorsque J est un intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1 (Pratique).

■ L'hypothède de domination peut-être remplacée par « ***l'hypothèse de domination locale*** » : il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a inclus dans J et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant : $\forall (x,t) \in \mathcal{V}_a \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Théorème 1.2. **intégration terme à terme**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n$ est cpm et intégrable sur I,

2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I et de somme cpm sur I,

3. La série numérique $\sum \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Alors la somme $t \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est intégrable sur I et $\boxed{\int_I \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t)\right)\mathrm{d}t}$.

Exemple 1.2. ■ Établir l'identité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pour tout $t \in \left]0,1\right[$, $\displaystyle\frac{\ln t}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(t)t^n$. On pose $f_n(t) = -\ln(t)t^n$. On a

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f_n$ est cpm et intégrable sur $\left]0,1\right[$ puisque $\sqrt{t}f_n(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $f_n(t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0$;
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0,1\right[$ et sa somme $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est cpm sur $\left]0,1\right[$;
- La série numérique $\sum \int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge puisque $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 -\ln(t)t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ est intégrable sur $\left]0,1\right[$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2 Régularité d'une intégrales à paramètre

Continuité

Ici, X désigne une partie d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 2.1. **continuité locale**

Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $x_0 \in X$. Si

1. $\forall t \in I,\ \ x \longmapsto f(x,t)$ est continue en x_0 et $\forall x \in X,\ \ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur I,

2. $\exists \mathcal{V}_{x_0} \subset X$ un voisinage de a et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x,t) \in \mathcal{V}_{x_0} \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t).\ (\textbf{\textit{hypothèse de domination}})$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathcal{V}_{x_0}$ et continue en x_0.

Théorème 2.2. **continuité globale**

Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. Si

1. $\forall t \in I,\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur X et $\forall x \in X,\ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur I,

2. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant : $\forall (x,t) \in X \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$. (***hypothèse de domination***)

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur X.

Remarque 2.1 (Pratique).

- L'hypothède de domination peut-être remplacée par « ***l'hypothèse de domination locale*** » : pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant : $\forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$.
- Lorsque X est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut remplacer le compact K par un segment $[a,b] \subset X$.

Exemple 2.1. Continuité de $g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$ sur $]0,+\infty[$.

On pose pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times [0,+\infty[,\ f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t}}$. On a

- $\forall t \in [0,+\infty[,\ x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur $[0,+\infty[$;
- Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. On a $\forall (x,t) \in [a,b] \times [0,+\infty[,\ |f(x,t)| \leq \frac{\mathrm{e}^{-at}}{\sqrt{1+t}} = \varphi(t)$ qui est, positive, cpm et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité, la fonction g est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Dérivabilité

Théorème 2.3. **caractère $\mathcal{C}^1$**

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable par rapport à x. Si

1. $\forall x \in J,\ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrables sur I,

2. $\forall t \in I,\ x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J et $\forall x \in J,\ t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur I,

3. $\exists \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).\ (\textbf{\textit{hypothèse de domination}})$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et on a la formule de Leibniz suivante :

$$\boxed{\forall x \in J,\ \ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t}.$$

Remarque 2.2 (Pratique).

- L'hypothède de domination peut-être remplacée par « ***l'hypothèse de domination locale*** » : pour tout $[a,b] \subset J$, il existe $\varphi_{a,b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant : $\forall (x,t) \in [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t)$.

Exemple 2.2. Soit $a > 0$. Expression simple de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt - at^2}\mathrm{d}t$.

On pose, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}$. La fonction f est dérivable par rapport à x et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}.$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrables sur $\mathbb{R}$ car $t^2|f(x,t)| = t^2\,\mathrm{e}^{-at^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$;
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur $\mathbb{R}$;

- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = |t|\,\mathrm{e}^{-at^2}$ qui est, positive, cpm et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t$. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{i}}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{i}x-2a\mathrm{i}t-\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{i}}{2a}\left(\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \mathrm{i}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt-at^2}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{-x}{2a}g(x).$$

La solution de l'équation différentielle $g'(x) = \dfrac{-x}{2a}g(x)$ est $g(x) = g(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$ avec

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t \underset{s=\sqrt{a}t}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

D'où $\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Théorème 2.4. **caractère $\mathcal{C}^k,\ k\geq 2$**

Soit $f : J\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable k fois par rapport à x. Si

1. $\forall p\in[\![0,k-1]\!], \forall x\in J,\ \ t\longmapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est cpm et intégrables sur I,

2. $\forall t\in I,\ x\longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur J et $\forall x\in J,\ t\longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est cpm sur I,

3. Pour tout $[a,b]\subset J$, il existe $\varphi_{a,b} : I\longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t). \qquad (\textit{\textbf{hypothèse de domination locale}})$$

Alors la fonction $g : x\longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et on a la formule de Leibniz suivante :

$$\boxed{\forall p\in[\![1,k]\!], \forall x\in J,\ \ g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\mathrm{d}t}.$$

Corollaire 2.1. **caractère $\mathcal{C}^\infty$**

Soit $f : J\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application indéfiniment dérivable par rapport à x. Si

1. $\forall x\in J,\ \ t\longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrables sur I,

2. $\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall t\in I,\ x\longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur J et $\forall x\in J,\ t\longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est cpm sur I,

3. Pour tout $[a,b]\subset J$ et $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $\varphi : I\longrightarrow \mathbb{R}^+$ cpm et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi(t). \qquad (\textit{\textbf{hypothèse de domination locale}})$$

Alors la fonction $g : x\longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et on a la formule de Leibniz suivante :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall x\in J,\ \ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t}.$$

3 Étude de la fonction Γ d'Euler

On appelle fonction Gamma la fonction définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

la fonction $t\longmapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ est cpm sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad t^2t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad\text{et}\quad t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \text{ qui, est intégrable si, et seulement si, } x>0.$$

2. Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Introduisons, pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,+\infty[$, $f(x,t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

- $\forall t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm sur $]0,+\infty[$;
- soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. On a $\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$, $|f(x,t)| = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln(t)}\,\mathrm{e}^{-t} \le \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 < t \le 1 \\ t^{b-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$ qui est, positive, cpm et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité, la fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f est indéfiniment dérivable par rapport à x et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln t)^k t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto f(x,t)$ est cpm et intégrables sur $]0,+\infty[$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est cpm sur $]0,+\infty[$;
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| = |\ln t|^k t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \le \varphi_k(t)$ avec $\varphi_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 < t \le 1 \\ |\ln t|^k t^{b-1}\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$ qui est, positive, cpm et intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque

$$1 - \tfrac{a}{2} < 1,\ t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_k(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0, \quad \text{et} \quad t^2\varphi_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Alors la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

4. $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

Soit $x > 0$. Par intégration par parties,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$ et

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\ldots\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots\times 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\ldots\times 1}{2^n(2n)(2n-2)\ldots\times 2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Or $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underbrace{=}_{s=\sqrt{t}} 2\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s}_{=\sqrt{\pi}/2} = \sqrt{\pi}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

5. Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\forall x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{(\ln t)^2 t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}}_{\substack{\text{positive et non} \\ \text{identiquement nulle}}}\,dt > 0$, donc Γ est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Variations de Γ.

La fonction Γ est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$ et $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha)=0$. Or Γ' est strictement croissante, donc α est unique dans $]1,2[$.

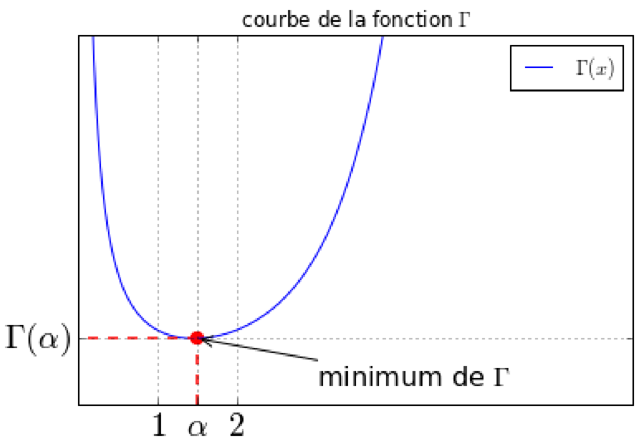
Comme la fonction Γ' est strictement croissante, alors [1]

$$\forall x\in]0,\alpha[\,,\ \Gamma'(x)<\Gamma'(\alpha)=0 \ \text{ et }\ \forall x\in]\alpha,+\infty[\,,\ \Gamma'(x)>\Gamma'(\alpha)=0.$$

x	0		α		$+\infty$
$\Gamma'(x)$		$-$	0	$+$	
Γ	$+\infty$	$\searrow$	$\Gamma(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

7. $\Gamma(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x}=+\infty$.

- Pour $x>0$, $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Puisque Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $\Gamma(x+1)\xrightarrow[x\to0^+]{}\Gamma(1)=1$ et par suite, $\Gamma(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{x}$.
- Γ étant croissante sur $[2,+\infty[$. Pour $x\geq2$, $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)\geq(x-1)\Gamma(1)=x-1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$.
- Soit $x>1$. On a $\dfrac{\Gamma(x)}{x}=\dfrac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x}=\underbrace{\dfrac{(x-1)}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}\Gamma(x-1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.



1. On peut aussi dire que, puisque Γ est convexe et que $\Gamma'(\alpha)=0$, alors Γ admet un minimum global en α.