

Chapitre 10

Probabilités

M. BINYZE

<https://supspé.com>

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Tribus, espaces probabilisables et événements

Soit Ω un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

Définition 1.1 (tribu, espace probabilisable).

Une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelée **tribu** (ou σ -**algèbre**) sur Ω si :

- 1 $\Omega \in \mathcal{T}$.
- 2 $\forall A \in \mathcal{T}, \overline{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.
- 3 $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **espace probabilisable**.

Dans la suite, le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ désigne un espace probabilisable.



- 1 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω , dite tribu grossière.
- 2 $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω , dite tribu discrète¹.

Proposition 1.1 (propriétés).

- 1 $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- 2 $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.
- 3 $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \cup B \in \mathcal{T}, A \cap B \in \mathcal{T}, A \setminus B \in \mathcal{T}$.

Définition 1.2 (événement).

Les parties A de Ω éléments de la tribu $\mathcal{T}$ sont appelées **événement** de Ω .

¹Ce choix est le plus usuel lorsque Ω est fini ou dénombrable.

Probabilités, espaces probabilisés

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

Définition 1.3 (probabilité, espace probabilisé).

On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- 1 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- 2 Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles¹, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n). \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

¹ $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \neq n \implies A_m \cap A_n = \emptyset$.

Dans la suite, le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.



Lorsque Ω est fini et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, on définit la **probabilité uniforme** sur Ω par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Proposition 1.2 (propriétés élémentaires).

1 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

2 $\forall (A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{T}^{n+1}$ deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k).$$

3 Soit $A, B \in \mathcal{T}.$

1 $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$

2 $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$

3 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

4 $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$

4 $\forall (A_0, \dots, A_n) \in \mathcal{T}^{n+1},$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k).$$

Théorème 1.1 (continuité monotone).

1 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right). \quad (\text{continuité croissante})$$

2 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right). \quad (\text{continuité décroissante})$$

Corollaire 1.1 (probabilité d'une union et d'une intersection dénombrable).

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right)$$

et

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=0}^n A_k \right).$$

Proposition 1.3 (sous-additivité).

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.
$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
 (sous-additivité)

Théorème 1.2 (probabilité sur un univers au plus dénombrable).

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, noté $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs sommable de somme 1. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n \text{ et } \forall A = \{\omega_i, i \in I \subset \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} p_i.$$



Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Une probabilité sur Ω est entièrement déterminée par le choix de $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. En prenant $p_i = \frac{1}{n}$, on définit l'équiprobabilité sur $[[1, n]]$.

Événements négligeables, événements presque sûrs

Définition 1.4 (événement négligeable, événement presque sûr).

- 1 On dit qu'un événement A est **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$.
- 2 On dit qu'un événement A est **presque sûr** (p.s)¹ si $\mathbb{P}(A) = 1$.

¹ou **quasi-certain**

Proposition 1.4 (propriétés quasi-certaines).

- 1 Soit $A, B \in \mathcal{T}$ tel que $B \subset A$.
 - 1 A négligeable $\implies B$ négligeable.
 - 2 B p.s $\implies A$ p.s.
- 2 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$.
 - 1 $\forall n \in \mathbb{N}, A_n$ négligeable $\implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ négligeable.
 - 2 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ p.s $\implies \forall n \in \mathbb{N}, A_n$ p.s.

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance**
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 2.1 (probabilité conditionnelle).

Soit $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. L'application $\mathbb{P}_B$ définie sur $\mathcal{T}$ par

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad \mathbb{P}_B(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ appelée la **probabilité de A sachant B** .
On note aussi $\mathbb{P}(A \mid B)$ pour $\mathbb{P}_B(A)$.

Théorème 2.1 (formule des probabilités composées).

Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$



Une urne contient $r \geq 2$ boules rouges et $n \geq 2$ boules noires, indiscernables au toucher. On tire successivement quatre boules sans remise. Quelle est la probabilité que les deux premières soient rouges et les deux dernières noires ?



- Notons R_1 l'événement "la première boule tirée est rouge", R_2 l'événement "la deuxième boule tirée est rouge", N_3 l'événement "la troisième boule tirée est noire" et N_4 l'événement "la quatrième boule tirée est noire". On cherche à calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3 \cap N_4)$.
- On a par hypothèses :

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{r+n}, \quad \mathbb{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{r-1}{r+n-1},$$

$$\mathbb{P}(N_3 \mid R_1 \cap R_2) = \frac{n}{r+n-2}$$

et

$$\mathbb{P}(N_4 \mid R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{n-1}{r+n-3}.$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3 \cap N_4) = \frac{r(r-1)n(n-1)}{(r+n) \dots (r+n-3)}.$$

Définition 2.2 (système complet d'événements).

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements, où I est un ensemble au plus dénombrable, est appelée **système complet d'événements** si :

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ avec } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j .$$

Théorème 2.2 (formule des probabilités totales).

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.

$$\forall B \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i) .$$

Théorème 2.3 (formule de Bayes).

1 Soit $A, B \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

2 Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements tel que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$. On a :

$$\forall j \in I, \forall B \in \mathcal{T} \text{ tel que } \mathbb{P}(B) \neq 0, \quad \mathbb{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Définition 2.3 (indépendance de deux événements).

Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$



On tire successivement et **sans remise** deux boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 2 boules rouges. Les événements "la première boule tirée est blanche" et "la seconde boule tirée est blanche" ne sont pas indépendants.

En revanche, si l'on procède à un tirage **avec remise**, ces événements deviennent indépendants.

Proposition 2.1 (complémentaires de deux d'événements indépendants).

Soit $A, B \in \mathcal{T}$. Les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition 2.4 (famille mutuellement indépendants).

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements, où I est un ensemble au plus dénombrable.

- 1 Les événements A_i , $i \in I$ sont **deux à deux indépendants** si

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \text{ pour tout } i \neq j.$$

- 2 Les événements A_i , $i \in I$ sont **mutuellement indépendants**¹ ou **indépendants** si

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall i_1, \dots, i_p \in I \text{ avec } i_1 < \dots < i_p, \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^p A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

¹L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance des événements deux à deux, et la réciproque est fausse.



Une sous-famille d'événements mutuellement indépendants est aussi mutuellement indépendants.

Proposition 2.2 (complémentaires d'événements mutuellement indépendants).

Soit $(A_i)_{i \in I}$, où I est un ensemble au plus dénombrable, une famille d'événements mutuellement indépendants et $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille de réels telle que $\varepsilon_i = 0$ ou 1 . On pose

$$A_i^{\varepsilon_i} = \begin{cases} A_i & \text{si } \varepsilon_i = 0 \\ \overline{A_i} & \text{si } \varepsilon_i = 1 \end{cases}.$$

Alors la famille $(A_i^{\varepsilon_i})_{i \in I}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités**
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Définition 3.1 (variable aléatoire réelle).

On appelle **variable aléatoire réelle** (v.a.r.) sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{T}.$$

Dans la suite, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Notations : Soit X une v.a.r. et $A \subset \mathbb{R}$. On note

$$(X \in A) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}.$$

En particulier, si $a \in \mathbb{R}$,

$$(X = a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\}, (X \leq a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$$

et

$$(X > a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > a\}.$$



Soit X une v.a.r. Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $(X \in I) \in \mathcal{T}$.

Proposition 3.1 (opérations sur les v.a.r.).

- 1 Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. ($n \geq 1$) et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. L'application

$$\omega \in \Omega \longmapsto f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

est une v.a.r. On la note $f(X_1, \dots, X_n)$.

- 2 Soit X une v.a.r. et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone (ou monotone par morceaux). L'application composée $f \circ X$ est une v.a.r. On la note $f(X)$.
- 3 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. qui converge simplement vers une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, alors X est une v.a.r.



1 Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. Alors

$$\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i, \min_{1 \leq i \leq n} X_i \text{ et } \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

sont des v.a.r.

2 Soit X une v.a.r. Alors $\lfloor X \rfloor$, X^2 , $|X|$ et $\cos X$ sont des v.a.r.

Loi d'une variable aléatoire réelle

$\mathcal{I}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 3.2 (loi d'une variable aléatoire réelle).

Soit X une v.a.r. On appelle **loi de** X l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_X : \mathcal{I}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & [0, 1] \\ J & \longmapsto & \mathbb{P}_X(J) = \mathbb{P}(X \in J) \end{array}.$$



Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X la v.a.r. constante égale à λ . On a

$$\mathbb{P}_X(J) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in J \\ 0 & \text{si } \lambda \notin J \end{cases} = 1_J(\lambda).$$

Définition 3.3 (loi d'une famille de v.a.r.).

Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. On appelle **loi de la famille** $(X_1, \dots, X_n)$ l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} : \mathcal{I}(\mathbb{R})^n &\longrightarrow [0, 1] \\ \prod_{i=1}^n J_i &\longmapsto \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} \left(\prod_{i=1}^n J_i \right) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in J_i) \right) \end{aligned}$$

Notation : On note $(X_1 \in J_1, \dots, X_n \in J_n)$ l'événement $\bigcap_{i=1}^n (X_i \in J_i)$.

Définition 3.4 (loi conditionnelle de X sachant A).

Soit X une v.a.r. et $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **loi de X sachant A** l'application définie par

$$\forall J \in \mathcal{I}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}_A(X \in J) = \frac{\mathbb{P}((X \in J) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

On la note $(\mathbb{P}_A)_X$.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 3.5 (fonction de répartition d'une v.a.r.).

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On appelle **fonction de répartition de X** l'application

$$\begin{array}{rcl} F_X : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1] \\ t & \longmapsto & F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}.$$

Proposition 3.2 (propriétés de F_X).

- 1 F_X est croissante¹ sur $\mathbb{R}$.
- 2 F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
- 3 $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.

¹En particulier, F_X admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

Proposition 3.3 (fonction de répartition de X vs la loi de X).

Soient X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$.

$$1 \quad \mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a).$$

$$2 \quad \mathbb{P}(X < a) = \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t).$$

$$3 \quad \mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t).$$

$$4 \quad \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

$$5 \quad \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t).$$

$$6 \quad \mathbb{P}(a \leq X < b) = \lim_{t \rightarrow b^-} F_X(t) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t).$$

$$7 \quad \mathbb{P}(a < X < b) = \lim_{t \rightarrow b^-} F_X(t) - F_X(a).$$

$$8 \quad \mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t).$$



La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle : la connaissance de F_X permet de calculer $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Corollaire 3.1 (continuité de F_X).

Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et $a \in \mathbb{R}$.

$$F_X \text{ est continue en } a \iff \mathbb{P}(X = a) = 0.$$

Définition 3.6 (fonction de répartition d'une famille de v.a.r.).

Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On appelle **fonction de répartition de la famille** $(X_1, \dots, X_n)$ l'application¹

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)} : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0, 1] \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto F_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

définie par $F_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$.

¹La connaissance de $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ permet de calculer $\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n)$ pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n$ de $\mathbb{R}$.

Variables aléatoires réelles indépendantes

Définition 3.7 (famille de v.a.r. indépendante).

Soit $(X_j)_{j \in J}$ une famille de v.a.r.

- 1 Les v.a.r. X_j , $j \in J$, sont dites **deux à deux indépendantes** si, pour toute famille $(I_j)_{j \in J}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, les événements $(X_j \in I_j)$, $j \in J$, sont deux à deux indépendants.
- 2 Les v.a.r. X_j , $j \in J$, sont dites **indépendantes** (ou **mutuellement indépendantes**¹) si, pour toute famille $(I_j)_{j \in J}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$, les événements $(X_j \in I_j)$, $j \in J$, sont mutuellement indépendants.

¹L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance des v.a.r deux à deux. La réciproque est fausse.



Une sous-famille d'une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes est aussi constituée de v.a.r. mutuellement indépendantes.

Théorème 3.1 (indépendance héritée (lemme des coalitions)).

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $(n_0, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ tels que

$0 = n_0 < n_1 < \dots < n_{k-1} < n_k = n$ et $f_i : \mathbb{R}^{n_i - n_{i-1}} \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$ une application continue.

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de v.a.r. indépendantes alors la famille

$$(f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), f_2(X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}), \dots, f_k(X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k}))$$

est indépendante.



Soit (X_1, X_2, X_3, X_4) une famille de v.a.r. indépendantes. La famille $(X_1^2, X_2 X_3, \cos(X_4))$ est indépendante.

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes**
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires réelles seront définies sur cet espace.

Définition 4.1 (variable aléatoire réelle discrète).

Une v.a.r. X est dite de **loi discrète** (v.a.r.d.) s'il existe $\Omega' \in \mathcal{T}$ tel que¹ $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ et $D = X(\Omega')$ soit au plus dénombrable.

¹Dans la plupart du temps, l'existence de l'ensemble Ω' est justifié par l'univers Ω .



Soit X une v.a.r.d. et $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

- On a :

$$(X \in I) = \bigcup_{x \in I \cap D} (X = x),$$

donc si $\forall x \in D, (X = x) \in \mathcal{T}$, alors $(X \in I) \in \mathcal{T}$.

- On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in I) &= \mathbb{P}(X \in I \cap D) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in I \cap D} (X = x)\right) . \\ &= \sum_{x \in I \cap D} \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

On peut supprimer de D tous les éléments x tels que $\mathbb{P}(X = x) = 0$, les x restants sont appelés les **valeurs possibles** de la v.a.r.d. X .

Proposition 4.1 (loi d'une v.a.r.d.).

La loi d'une v.a.r.d. X est caractérisée par la donnée de¹ D et de l'application $x \in D \mapsto \mathbb{P}(X = x)$.

¹Dans la plupart du temps, l'ensemble D est $X(\Omega)$.



Soit X une v.a.r.d. Pour tout $A \subset D$, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

Théorème 4.1 (existence d'une suite infinie de v.a.r. indépendantes).

Si $\mathcal{L}$ désigne une loi d'une v.a.r. discrète, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ sur lequel il existe une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a.r. mutuellement indépendantes et suivant chacune la loi $\mathcal{L}$.

Définition 4.2 (v.a.r.d. de loi usuelle).

Soit X une v.a.r.d. On dit que la loi de X est **discrète usuelle** s'il existe un intervalle J de $\mathbb{Z}$ et une bijection croissante

$$\begin{aligned}\varphi: J &\longrightarrow D \\ k &\longmapsto x_k\end{aligned}$$

Exemples classiques de lois discrètes usuelles

Soit X une v.a.r.d.

Définition 4.3 (loi uniforme).

On dit que X suit la **loi uniforme** sur un ensemble fini E et, on note $X \sim \mathcal{U}(E)$, si :

$$X(\Omega) = E \quad \text{et} \quad \forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(E)}.$$

Situations-types :

- 1 Si X est la valeur du lancer d'un dé équilibré, alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.
- 2 On tire "au hasard" un entier entre 1 et n . Soit X le chiffre obtenu, alors $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Définition 4.4 (loi de Bernoulli).

On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ et, on note $X \sim \mathcal{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$



- 1 L'événement $(X = 1)$ est appelé "succès" et l'événement $(X = 0)$ est appelé "échec".
- 2 Les lois de Bernoulli servent à modéliser les épreuves à deux issues : succès ou échec.

Situations-types :

- 1 On lance une pièce et soit X égale à 1 si l'on obtient "pile" et 0 si on l'obtient "face". Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité d'obtenir "pile".
- 2 On lance un dé équilibré, dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6 et soit X égale à 1 si l'on obtient un chiffre multiple de 3 et 0 sinon.
Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{3, 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.



Soit $A \in \mathcal{T}$. La v.a.r.d. 1_A suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

Définition 4.5 (loi binomiale).

On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ et, on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$



- 1 Les lois binomiales servent à modéliser le nombre de succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
- 2 La loi $\mathcal{B}(1, p)$ est simplement la loi $\mathcal{B}(p)$.

Situations-types :

- 1 On lance une pièce n fois et soit X le nombre de piles obtenus, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où p est la probabilité d'obtenir "pile".
- 2 Une urne contient des boules blanches et des boules rouges. On tire n boules **avec remise** dans cette urne et soit X le nombre de boules blanches obtenues. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ où p est la probabilité d'obtenir une boule blanche.

Définition 4.6 (loi géométrique).

On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$ et, on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$



Une loi géométrique permet de modéliser le **temps d'attente** du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Situations-types :

- 1 On lance une pièce une infinité de fois et soit X le rang du premier "pile" obtenu, alors $X \sim \mathcal{G}(p)$ où p est la probabilité d'obtenir "pile".
- 2 On lance indéfiniment un dé et soit T le temps d'attendre du premier 6, alors $T \sim \mathcal{G}(p)$ où $p = \frac{1}{6}$.

Définition 4.7 (loi de Poisson).

On dit que X suit la **loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ et, on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$



Les lois de Poisson servent à modéliser le nombre de succès lors d'une grande répétition d'épreuves ayant une faible probabilité de réussite, on parle d'**événements rares**.

Situations-types :

Il n'y a pas de situation type où l'on peut reconnaître la loi de Poisson. La loi de Poisson peut être vue comme une "loi limite".

Loi conjointe et lois marginales

X et Y désignent deux v.a.r.d.

Définition 4.8 (loi conjointe, loi marginale).

- 1 La loi de la v.a.d. $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est appelée **loi conjointe** de X et Y .
$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$
- 2 Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales** de $Z = (X, Y)$.

Proposition 4.2 (la loi conjointe détermine les lois marginales).

Soient D_1, D_2 l'ensemble des valeurs possibles respectivement de X et Y .
On a :

$$\forall x \in D_1, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in D_2} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

et

$$\forall y \in D_2, \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in D_1} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité**
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Loi d'une variable aléatoire réelle à densité

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires réelles seront définies sur cet espace.

Définition 5.1 (variable aléatoire réelle à densité).

- 1 Une v.a.r. X est dite de **loi à densité** (ou de **loi continue**) si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un sous-ensemble F fini ou vide.
- 2 On appelle alors **densité** de X la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} F'_X(t) & \text{si } t \notin F \\ 0 & \text{si } t \in F \end{cases}.$$

Proposition 5.1 (caractérisation d'une densité).

La densité f_X est une fonction positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus F$, d'intégrale convergente et valant 1 sur $\mathbb{R}$.



Si X est une v.a.r. de loi à densité, alors $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = a) = 0$.

Proposition 5.2 (fonction de répartition de X vs la loi de X).

Soit X une v.a.r. de loi à densité et $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

$$\mathbb{P}(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t) dt.$$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.

Exemples classiques de lois à densité usuelles

Soit X une v.a.r. à densité.

Définition 5.2 (loi uniforme).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ et, on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}.$$

Définition 5.3 (loi exponentielle).

On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ et, on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{[0, +\infty[}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Définition 5.4 (loi Gamma).

On dit que X suit la **loi Gamma** de paramètre (α, λ) avec $\alpha, \lambda > 0$ et, on note $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} 1_{]0, +\infty[}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{où } \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Définition 5.5 (loi gaussienne).

On dit que X suit la **loi gaussienne** (ou **normale**) de paramètre (μ, σ^2) avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et, on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Lorsque $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on dit X suit la **loi normale centrée réduite**.

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles**
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Somme de variables aléatoires réelles

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires réelles seront définies sur cet espace.

Proposition 6.1 (somme de v.a.r.d. indépendantes).

Soient X et Y deux v.a.r.d. indépendantes dont l'ensemble des valeurs possibles est respectivement D_1 et D_2 . La v.a.r. $S = X + Y$ est discrète dont l'ensemble des valeurs possibles est $D = \{x + y, (x, y) \in D_1 \times D_2\}$ de loi est donnée par¹ :

$$\begin{aligned} \forall s \in D, \quad \mathbb{P}(S = s) &= \sum_{x \in D_1} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = s - x) \\ &= \sum_{y \in D_2} \mathbb{P}(Y = y) \mathbb{P}(X = s - y) \end{aligned}$$

¹Cette formule est appelée la **convolution discrète** des lois de X et Y .



Stabilité de la loi de Poisson

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Alors $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

- $D = S(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $n \in S(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}.\end{aligned}$$

- D'où $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S = n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!}$ i.e.
 $S \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Proposition 6.2 (somme d'une v.a.r.d. et d'une v.a.r. à densité indépendantes).

Soient X une v.a.r.d. dont l'ensemble des valeurs possibles est D et Y une v.a.r. à densité de densité f_Y telles que X et Y sont indépendantes. La v.a.r. $S = X + Y$ est à densité de densité f_S est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) = \sum_{x \in D} \mathbb{P}(X = x) f_Y(t - x).$$

Proposition 6.3 (somme de v.a.r. à densité indépendantes).

Soient X et Y deux v.a.r. à densité indépendantes de densités respectives f_X et f_Y .

La v.a.r. $S = X + Y$ est à densité de densité f_S est donnée par¹ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx.$$

¹Cette formule est appelée la **convolution des densités** f_X et f_Y .

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments**
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Espérance

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires réelles seront définies sur cet espace.

Définition 7.1 (espérance d'une v.a.r.).

- 1 Soit X une v.a.r. de loi discrète dont l'ensemble des valeurs possibles est D . On dit que X admet une **espérance** si la famille $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in D}$ est sommable. Dans ce cas, on appelle **espérance de X** le réel

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{x \in D} x\mathbb{P}(X = x).$$

- 2 Soit X une v.a.r. de loi à densité de densité f_X . On dit que X admet une **espérance** si l'application $t \mapsto tf_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on appelle **espérance de X** le réel

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt.$$



Espérance des variables aléatoires discrètes usuelles

- 1 $X \sim \mathcal{B}(p)$. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = 0.\mathbb{P}(X = 0) + 1.\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

- 2 $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ est fini donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \underbrace{\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}}_{=1} \\ &= np.\end{aligned}$$



3 $X \sim \mathcal{G}(p)$. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

La série $\sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}$ est une série

dérivée géométrique de raison $1-p$ convergente car $|1-p| < 1$ donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$= p \underbrace{\left(\frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=1-p}}_{=1/p^2}$$

$$= \frac{1}{p}.$$



4 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

La série $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=e^{\lambda}} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$



Espérance des variables aléatoires à densité usuelles

1 $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

La fonction $t \mapsto tf_X(t) = \frac{t}{b-a}1_{[a,b]}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{b-a}1_{[a,b]}(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{t}{b-a}dt \\ &= \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$



2 $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

La fonction $t \mapsto tf_X(t) = \lambda t e^{-\lambda t} 1_{[0, +\infty[}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $t^2 \cdot tf_X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$) donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} 1_{[0, +\infty[}(t) dt \\&= \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt \\&= \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{s=\lambda t} \underbrace{\int_0^{+\infty} s e^{-s} ds}_{=\Gamma(2)=1} \\&= \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$



3 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

La fonction $t \mapsto tf_X(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha e^{-\lambda t} 1_{]0, +\infty[}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $t^2 \cdot tf_X(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$) donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha e^{-\lambda t} 1_{]0, +\infty[}(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha e^{-\lambda t} dt \\ &\underset{s=\lambda t}{=} \underbrace{\frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} s^\alpha e^{-s} ds}_{=\Gamma(\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}.\end{aligned}$$



4 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La fonction $t \mapsto t f_X(t) = \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $t^2 \cdot t f_X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$) donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

$$\begin{array}{l} \text{changement} \\ \text{de variable} \\ s = (t-\mu)/\sqrt{2}\sigma \end{array} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\underbrace{\mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds}_{=\sqrt{\pi}} + \sqrt{2}\sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} ds}_{=0} \right)$$

$$= \mu.$$

Théorème 7.1 (théorème de transfert).

Soit X une v.a.r. et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de sorte que $Y = g(X)$ soit une v.a.r.

- 1 Supposons X est de loi discrète dont l'ensemble des valeurs possibles est D . On a :

Y admet une espérance si, et seulement si, $(g(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in D}$ est sommable. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in D} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

- 2 Supposons X est de loi à densité de densité f_X . On a :

Y admet une espérance si, et seulement si, $t \mapsto g(t)f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt.$$

Théorème 7.2 (théorème de transfert d'un couple de v.a.r.d.).

Soient X et Y deux v.a.r.d. dont l'ensemble des valeurs possibles respectivement D_1 et D_2 . Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de sorte que $Z = g(X, Y)$ soit une v.a.r.

Alors Z admet une espérance si, et seulement si, la famille $(g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y))_{(x, y) \in D_1 \times D_2}$ est sommable. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(x, y) \in D_1 \times D_2} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Proposition 7.1 (propriétés de l'espérance).

Soient X et Y deux v.a.r.

- 1 Linéarité : si X et Y admettent une espérance, alors pour tous

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ aussi. De plus $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

- 2 Supposons X admet une espérance.

- 1 Positivité : $X \geq 0 \implies \mathbb{E}(X) \geq 0$.

- 2 Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) = 0 \implies X = 0$ p.s.

- 3 Croissance : si X et Y admettent une espérance, alors

$$X \leq Y \implies \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

- 4 Inégalité triangulaire : X admet une espérance si, et seulement si $|X|$ aussi. De plus $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

- 5 Domination : si $|X| \leq Y$ et si Y admet une espérance, alors X aussi.



En particulier, si $|X|$ est bornée, alors X admet une espérance.

Théorème 7.3 (espérance de variables aléatoires indépendantes).

Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes admettent une espérance, alors¹ XY aussi et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

¹La réciproque est fausse.

Définition 7.2 (v.a.r. centrée).

Une v.a.r. X qui admet une espérance est dite **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.



Si X admet une espérance, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Définition 7.3 (moments d'ordre k).

Soit X une v.a.r. et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un **moment d'ordre k** si X^k admet une espérance. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X^k)$ s'appelle le **moment d'ordre k** de X . Ainsi :

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} \sum_{x \in D} x^k \mathbb{P}(X = x) & \text{si } X \text{ est de loi discrète dont l'ensemble} \\ & \text{des valeurs possibles est } D. \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_X(t) dt & \text{si } X \text{ est de loi à densité de densité } f_X. \end{cases}$$

Proposition 7.2.

Soit X une v.a.r. admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$.

- 1 X admet un moment d'ordre j pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
- 2 $X + \alpha$ admet un moment d'ordre k pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 7.4 (inégalité de Cauchy-Schwartz).

Soient X et Y deux v.a.r. admettent un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$$

avec égalité si, et seulement si $X = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, Y = \lambda X$ p.s.

Définition 7.4 (variance, écart-type).

Soit X une v.a.r. admet un moment d'ordre 2.

- 1 On appelle **variance** de X le réel positif

$$\mathbb{V}(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right).$$

- 2 On appelle **écart-type** de X le réel

$$\sigma(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Proposition 7.3 (propriétés de variance).

Soit X une v.a.r. admet une variance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1 Formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

2 $\mathbb{V}(X) = 0 \iff X$ est constante p.s.

3 $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \text{ et } \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Définition 7.5 (v.a.r. centrée réduite).

Soit X une v.a.r. admet une variance.

Si $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est **réduite**.

Si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est **centrée réduite**.



Si X admet une variance > 0 alors $\frac{X}{\sigma(X)}$ est réduite et

$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Définition 7.6 (covariance).

Soient X et Y deux v.a.r. admettent un moment d'ordre 2. On définit la **covariance** du couple (X, Y) par

$$\mathbb{C}(X, Y) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Proposition 7.4 (propriétés de covariance).

Soient X et Y deux v.a.r. admettent un moment d'ordre 2.

1 $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{C}(Y, X)$ et $\mathbb{C}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

2 $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

3 Si X et Y sont indépendantes, alors¹ $\mathbb{C}(X, Y) = 0$.

4 $|\mathbb{C}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

¹La réciproque est fausse.

Proposition 7.5 (variance de la somme).

Soient X et Y deux v.a.r. admettent un moment d'ordre 2.

- 1 $X + Y$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X, Y).$$

- 2 Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$

Définition 7.7 (coefficient de corrélation linéaire).

Soient X et Y deux v.a.r. admettent un moment d'ordre 2 telles que $\mathbb{V}(X) > 0$ et $\mathbb{V}(Y) > 0$. On définit le **coefficient de corrélation linéaire** du couple (X, Y) par

$$\rho(X, Y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition 7.6 (propriétés du coefficient de corrélation linéaire).

Soient X et Y deux v.a.r. admettent un moment d'ordre 2 telles que $\mathbb{V}(X) > 0$ et $\mathbb{V}(Y) > 0$.

1 $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.

2 $\rho(X, Y) = 1 \iff \exists \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, Y = \alpha X + \beta \text{ p.s.}$.

3 $\rho(X, Y) = -1 \iff \exists \alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}, Y = \alpha X + \beta \text{ p.s.}$.

4 Si X et Y sont indépendantes, alors¹ $\rho(X, Y) = 0$.

¹La réciproque est fausse.

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$**
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Toutes les v.a.r. seront définies sur cet espace à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 8.1 (fonction génératrice).

On appelle **fonction génératrice** de X la fonction

$$G_X(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n.$$

Proposition 8.1 (propriétés de G_X).

- 1 G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$
- 2 $G_X(1) = 1$ et $\forall t \in [-1, 1], |G_X(t)| \leq 1$.
- 3 La série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ CN sur $[-1, 1]$.
- 4 G_X est continue sur $[-1, 1]$.
- 5 G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.
- 6 $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.



G_X caractérise la loi de probabilité. Autrement dit,

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \iff G_X = G_Y.$$



Fonction génératrice des variables aléatoires discrètes usuelles

1 $X \sim \mathcal{B}(p)$.

$X(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k \\ &= \mathbb{P}(X = 0)t^0 + \mathbb{P}(X = 1)t^1 \\ &= (1 - p) + pt.\end{aligned}$$



2 $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ est fini donc la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= ((1-p) + pt)^n. \end{aligned}$$



3 $X \sim \mathcal{G}(p)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la série $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)t^k = \frac{p}{1-p} \sum_{k \geq 1} ((1-p)t)^k$

converge si, et seulement si, $|(1-p)t| < 1$ (série géométrique) et

$$\begin{aligned} \forall t \in \left] \frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[, \quad G_X(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^k \\ &= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)t}{1 - (1-p)t} \\ &= \frac{pt}{1 - (1-p)t}. \end{aligned}$$



4 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)t^k = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

$$= e^{\lambda(t-1)}.$$

Proposition 8.2 (fonction génératrice de la somme).

Si $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes, alors

$$G_{X_1+\dots+X_k} = \prod_{i=1}^k G_{X_i}.$$

Somme de Bernoulli indépendantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Alors $S = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p . En effet :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_S(t) &= \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) \\ &= \left(G_{X_1}(t) \right)^n = \left((1-p) + pt \right)^n. \end{aligned}$$

Donc $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Théorème 8.1 (espérance et variance).

- 1 X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1. Dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1).$$

- 2 X admet une variance si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas

$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

et

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

Plan

- 1 Probabilités, espaces probabilisés
- 2 Probabilités conditionnelles et indépendance
- 3 Variables aléatoires : généralités
- 4 Variables aléatoires réelles discrètes
- 5 Variables aléatoires réelles à densité
- 6 Somme de variables aléatoires réelles
- 7 Espérance, variance et moments
- 8 Fonction génératrice d'une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$
- 9 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires réelles seront définies sur cet espace.

Théorème 9.1 (Inégalité de Markov).

Soit X une v.a.r. **positive** admettant une espérance.

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Théorème 9.2 (Inégalité de Bienyamé-Tchebychev).

Soit X une v.a.r. admettant un moment d'ordre 2.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 9.3 (Inégalité de Jensen).

Soit X est une v.a.r. admettant une espérance et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Si $f(X)$ admet une espérance, alors

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Définition 9.1 (convergence en probabilité).

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilité** vers X si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On écrit alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.



Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

On a $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.

- Posons $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$. On a $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n} \mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_1^2)}_{=1} - \frac{1}{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_1)^2}_{=0} = \frac{1}{n}.$$

- D'après l'inégalité de Bienyamé-Tchebychev,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'où $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Proposition 9.1.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et X une v.a.r. de sorte que $f_n(X)$ et $f(X)$ reste des v.a.r. Alors

$$f_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} f(X) .$$

Définition 9.2 (convergence en loi).

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si¹

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus D_X, \quad F_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_X(t).$$

où D_X est l'ensemble des points de discontinuité de F_X . On écrit alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

¹Les v.a.r. X_n et X peuvent être définies sur des espaces distincts, puisque seules leurs lois sont en cause.

Proposition 9.2 (convergence en loi pour une v.a.r. discrète).

Soient X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a équivalence entre :

1 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X;$

2 $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(X = k).$



Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0, 1]$ telle que $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda > 0$

et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. suivant toutes la loi binomiale de paramètre (n, p_n) .

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a.r. qui suit la loi de poisson de paramètre λ .

En effet : soit $k \in [[0, n]]$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}\end{aligned}$$



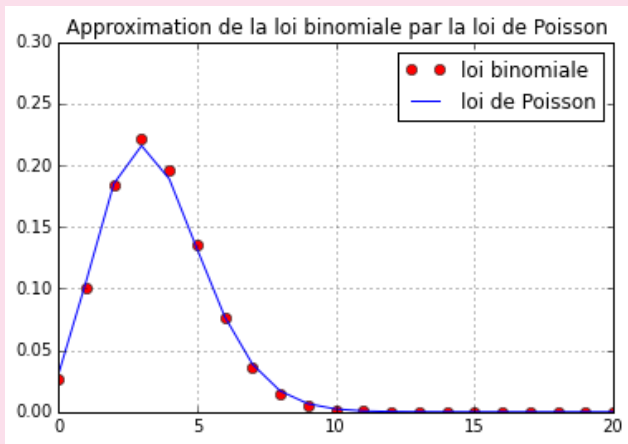
$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!} (1 - p_n)^{n-k}.$$

Or

$$(1 - p_n)^{n-k} = \exp((n - k) \ln(1 - p_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}.$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$



Proposition 9.3 (la cv en probabilité implique la cv en loi).

Soient X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des v.a.r.

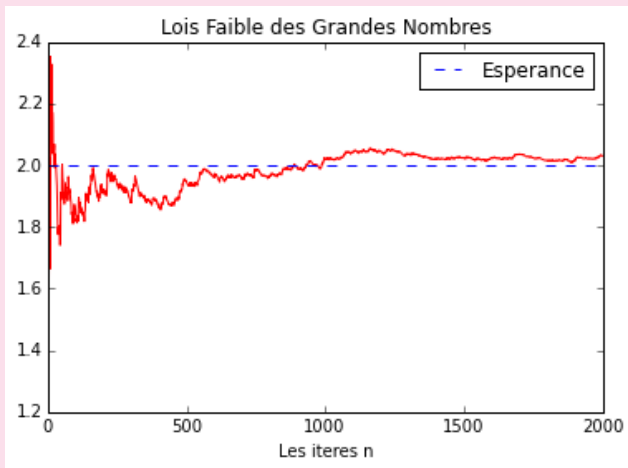
$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$$

(la réciproque est fausse)

Théorème 9.4 (loi faible des grands nombres (LFGN)).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu = \mathbb{E}(X_1).$$

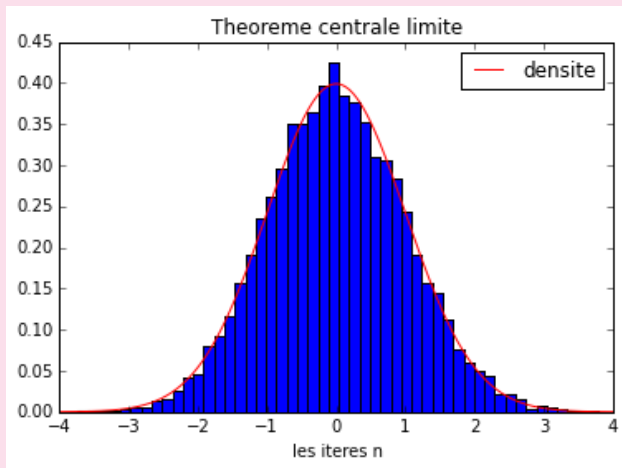


Théorème 9.5 (théorème de la limite centrée).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi¹, admettant un moment d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma = \sigma(X_1)$. On a

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mu \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \quad \text{où} \quad X \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

¹On n'a pas besoin de connaître la loi des X_n .



*Merci
pour votre
attention!*