

TD N°10

Probabilités (I) (correction)

1 Probabilités, espaces probabilisés

Corrigé de l'exercice 1. $\Omega \in \mathcal{T}$ car $\Omega = f^{-1}(\Omega')$ avec $\Omega' \in \mathcal{T}'$.

Soit $A \in \mathcal{T}$. Il existe $A' \in \mathcal{T}'$ tel que $A = f^{-1}(A')$. On a alors $\overline{A} = \overline{f^{-1}(A')} = f^{-1}(\underbrace{\overline{A'}}_{\in \mathcal{T}'}) \in \mathcal{T}$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Il existe $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}'^{\mathbb{N}}$ telle que $A_n = f^{-1}(A'_n)$. On a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A'_n) = f^{-1}(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A'_n}_{\in \mathcal{T}'}) \in \mathcal{T}$. D'où $\mathcal{T}$

est une tribu sur Ω .

Corrigé de l'exercice 2. 1. $\Omega \in \mathcal{T}$ car $\overline{\Omega} = \emptyset$ est au plus dénombrable.

Soit $A \in \mathcal{T}$. Il est clair que $\overline{A} \in \mathcal{T}$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est au plus dénombrable, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est au plus dénombrable, comme union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} n'est pas dénombrable alors $\overline{A_{n_0}}$ est au plus dénombrable. Comme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \subset \overline{A_{n_0}}$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ est au plus dénombrable. Ainsi $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$. D'où $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ car $\overline{\Omega} = \emptyset$ est dénombrable.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est dénombrable, alors $\mathbb{P}(A_n) = 0$. De plus, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable. Ainsi, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 1$.

- S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} ne soit pas dénombrable, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ n'est pas dénombrable car il contient A_{n_0} . Ainsi, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

Or $\forall n \neq n_0$, $A_n \subset \overline{A_{n_0}}$ et que $\overline{A_{n_0}}$ est dénombrable, donc les ensembles A_n , $n \neq n_0$ sont dénombrables et leurs probabilités sont donc nulles. On en déduit

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n_0}) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq n_0}} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n_0}) = 1.$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Par suite, $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Corrigé de l'exercice 3. $\mathbb{N} = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ donc $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$. La série $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ converge donc $\mathbb{P}(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Corrigé de l'exercice 4. Notons $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Analyse : Supposons l'existence d'une telle probabilité $\mathbb{P}$. On a $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(A_0) = 1$ donc $a_0 = 1$. Comme $A_n = \{n\} \cup A_{n+1}$ alors $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\{n\}) + \mathbb{P}(A_{n+1})$ donc $a_n - a_{n+1} = \mathbb{P}(\{n\}) \geq 0$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ car $A_{n+1} \subset A_n$. Ainsi la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$$a_0 = 1, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante et } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (*)$$

Synthèse : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelles qui vérifie $(*)$. Posons $p_n = a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^n p_k = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_0 = 1$. Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs sommable et de somme égale à 1 : il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{k \geq n} \{k\}\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) = a_n$.

Corrigé de l'exercice 5. 1. On raisonne sur l'événement contraire de A qui est l'événement « le résultat obtenu comporte N fois le même numéro ». Ainsi $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\text{Card}(\overline{A})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{n}{n^N}$ et donc $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{n}{n^N}$.

2. On note, pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, A_i l'événement « le résultat obtenu comporte au moins une fois le numéro i ». Donc $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. On raisonne sur les événements contraires :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}) &= \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}) \\ &= \mathbb{P}(\overline{A_1}) + \mathbb{P}(\overline{A_2}) + \mathbb{P}(\overline{A_3}) - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_3}) - \mathbb{P}(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_3}) &= \frac{(n-1)^N}{n^N}, \quad \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_3}) = \mathbb{P}(\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \frac{(n-2)^N}{n^N} \\ \text{et } \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) &= \frac{(n-3)^N}{n^N}.\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - 3 \frac{(n-1)^N}{n^N} + 3 \frac{(n-2)^N}{n^N} - \frac{(n-3)^N}{n^N}.$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. $\forall p \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n \geq p} A_n \in \mathcal{T}$ donc $A_* = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n \in \mathcal{T}$. De même pour A^* .

2. Soit $\omega \in A_*$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_n$ pour tout $n \geq p$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\omega \in A_{\max(p,q)}$ donc $\omega \in \bigcup_{m \geq q} A_m$. Ainsi $\omega \in \bigcap_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq q} A_m = A^*$.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\{\mathbb{P}(A_n), n \geq p+1\} \subset \{\mathbb{P}(A_n), n \geq p\}$ donc $\inf_{n \geq p+1} \mathbb{P}(A_n) \geq \inf_{n \geq p} \mathbb{P}(A_n)$. Ainsi la suite $\left(\inf_{n \geq p} \mathbb{P}(A_n)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, donc converge.

On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $B_p = \bigcap_{m \geq p} A_m$. On a, pour $n \geq p$, $B_p \subset A_n$ donc $\mathbb{P}(B_p) \leq \mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_p) \leq \inf_{n \geq p} \mathbb{P}(A_n)$. Or la suite

$$(B_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ est croissante donc, par continuité monotone, } \mathbb{P}(A_*) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_p) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\inf_{n \geq p} \mathbb{P}(A_n)\right).$$

De même pour la deuxième inégalité.

Corrigé de l'exercice 7. 1. $A_n = \overline{D_1} \cap \dots \cap \overline{D_{n-1}} \cap D_n$. On suppose que les lancers sont indépendants donc

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\overline{D_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(\overline{D_{n-1}}) \times \mathbb{P}(D_n).$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(D_n) = \frac{1}{6} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ donc } \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

$$2. A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{D_n} \text{ donc } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{D_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{D_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0. \text{ Ainsi l'événement } A \text{ est négligeable.}$$

3. Notons C l'événement « On obtient une infinité de 'six' ». L'événement contraire $\overline{C}$ se traduit par « On n'obtient qu'un nombre fini de 'six' lors de l'expérience » donc $\overline{C} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq N} \overline{D_n}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq N} \overline{D_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=N}^n \mathbb{P}(\overline{D_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-N+1} = 0.$$

Ainsi, $\overline{C}$ est réunion dénombrable d'événements négligeables donc $\overline{C}$ est négligeable et par suite $\mathbb{P}(C) = 1$.

Corrigé de l'exercice 8. 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ donc $(\mathbb{P}(\{n\}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de réels positifs sommable et de somme égale à 1 et la probabilité $\mathbb{P}$ en question existe.

$$2. \{n \in \mathbb{N}^*, n \text{ est pair}\} = \{2k, k \in \mathbb{N}^*\} = \biguplus_{k \in \mathbb{N}^*} \{2k\} \text{ donc } \mathbb{P}(\{n \in \mathbb{N}^*, n \text{ est pair}\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} = \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 9. 1. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p$. On a $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, de sorte que $\mathbb{P}(A^*) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$. Or

$$0 \leq \mathbb{P}(A^*) \leq \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car la série } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge.}$$

D'où $\mathbb{P}(A^*) = 0$.

2. Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $b_N = \prod_{n=0}^N (1 - a_n)$. La suite $(b_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, elle admet donc une limite positive

ou nulle ℓ . Supposons $\ell > 0$, dans ce cas $\ln(b_N) = \sum_{n=0}^N \ln(1 - a_n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln(\ell)$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - a_n)$ est convergente.

En particulier, $\ln(1 - a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $-a_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(1 - a_n)$. Par comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} -a_n$ converge, ce

qui est absurde et par suite $\ell = 0$. D'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N (1 - a_n) = 0$.

3. Puisque les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants alors il en est de même de leurs complémentaires et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, N \geq n, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{A_p}\right) = \prod_{p=n}^N \mathbb{P}(\overline{A_p}) = \prod_{p=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)). \quad (*)$$

D'après préliminaire, puisque la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, $\prod_{p=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_p)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Or la suite d'événements $\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{A_p}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Par la continuité décroissante,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{p=n}^N \overline{A_p}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{A_p}\right).$$

En passant à la limite dans (*), on obtient $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{A_p}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p}\right) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p}\right) = 1.$$

Corrigé de l'exercice 10. 1. On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^N \overline{A_n}\right)) = 1 - \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^N \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}).$$

2. (a) $\iff$ (b).

Supposons $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_k})\right) = -\infty$ i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln(\mathbb{P}(\overline{A_k})) = -\infty$ et la série $\sum \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge.

(b) $\iff$ (c).

Supposons $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, donc $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})) = \ln(1 - \mathbb{P}(A_n)) \underset{+\infty}{\sim} -\mathbb{P}(A_n)$ donc par comparaison, la série $\sum \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ converge.

Supposons $\sum \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ converge, donc $\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\mathbb{P}(A_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ donc par comparaison, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

2 Probabilités conditionnelles et indépendance

Corrigé de l'exercice 11. 1. $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(\{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2, i + j = 8\})}{\text{Card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket^2)} = \frac{5}{36}$.

2. $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$.

Corrigé de l'exercice 12. 1. $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(\{(i, 6), 1 \leq i \leq 5\} \cup \{(6, j), 1 \leq j \leq 5\} \cup \{(6, 6)\})}{\text{Card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket^2)} = \frac{11}{36}$.

2. Notons B l'événement « obtenir un 3 ». On cherche à calculer $\mathbb{P}_B(A)$. On a $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$.

Corrigé de l'exercice 13. 1. $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ et $\mathbb{P}(A_\infty) = 0$.

2. Les événements $A_n, n \in \mathbb{N}^*$ et A_∞ forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{A_\infty}(B) \mathbb{P}(A_\infty).$$

Or $\mathbb{P}_{A_n}(B) = \frac{1}{n}$ car, si le tirage amène la boule blanche dans le n -ième lancer du dé, l'urne contient une boule blanche et $n-1$ boules rouges. Par suite

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{\ln 6}{5}.$$

3. On cherche à calculer $\mathbb{P}_B(A_1)$. Par la formule de Bayes, $\mathbb{P}_B(A_1) = \frac{\mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1 \times 1/6}{(\ln 6)/5} = \frac{5}{6 \ln 6}$.

Corrigé de l'exercice 14. Notons, pour $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, B_k l'événement « la k -ième boule tirée est blanche ».

1. On cherche à calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n)$. Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-2}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n).$$

On a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{n}{2n}$, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{n-1}{2n-1}$, $\dots$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-(i-1)}{2n-(i-1)}$ pour $2 \leq i \leq n$. Par suite

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \frac{n}{2n} \frac{n-1}{2n-1} \dots \frac{2}{n+2} \frac{1}{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \binom{2n}{n}^{-1}.$$

2. On cherche à calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n})$. Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n}) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{n-2}}}(B_{n-1})\mathbb{P}_{B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}}}(\overline{B_n}).$$

On a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{n}{2n}$, $\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{n}{2n-1}$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \overline{B_2}}(B_3) = \frac{n-1}{2n-2}$, $\mathbb{P}_{B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3}(\overline{B_4}) = \frac{n-1}{2n-3}$ etc. Par suite

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n}) = \frac{n}{2n} \frac{n}{2n-1} \frac{n-1}{2n-2} \frac{n-1}{2n-3} \dots \frac{n/2+1}{n+2} \frac{n/2+1}{n+1} = \left(\frac{n!}{(n/2)!}\right)^2 \frac{n!}{(2n)!}.$$

3. Notons A l'événement « le tirage ne donne qu'une boule blanche ». On cherche à calculer $\mathbb{P}(A)$. On a

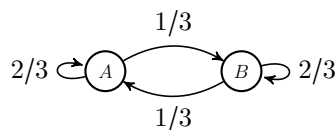
$$A = \bigoplus_{k=1}^n (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}).$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}) = \frac{n}{2n} \frac{n-1}{2n-1} \dots \frac{n-(k-2)}{2n-(k-2)} \frac{n}{2n-(k-1)} \frac{n-(k-1)}{2n-k} \dots \frac{2}{n+1} = \frac{n(n!)^2}{(2n)!}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^n \frac{n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n^2(n!)^2}{(2n)!} = n^2 \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Corrigé de l'exercice 15. Le graphe suivant rend compte de l'énoncé :



1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements A_n, B_n forment un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) \text{ et } \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n).$$

$$\text{Ainsi } a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n.$$

2. Les événements A_n, B_n forment un système complet d'événements, donc $a_n + b_n = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de point fixe $\frac{1}{2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)$. Or $a_0 = \mathbb{P}(A_0) = 1$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

3. L'état du système au temps $n+1$ ne dépend que de l'état au temps n et d'une expérience aléatoire (le tirage du dé) qui ne dépend pas de n , donc les probabilités $\mathbb{P}_{A_i}(A_j)$ et $\mathbb{P}_{A_{i-1}}(A_{j-1})$ sont égales. Ainsi

$$\mathbb{P}_{A_i}(A_j) = \mathbb{P}_{A_{i-1}}(A_{j-1}) = \dots = \mathbb{P}_{A_0}(A_{j-i}) = \mathbb{P}(A_{j-i}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{j-i}.$$

4. Puisque $\mathbb{P}_{A_i}(A_j) \neq \mathbb{P}(A_j)$, les événements A_i et A_j pour $i < j$ ne sont pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 16. 1. $\mathbb{P}(A_1) = \frac{b}{b+r}$ et par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_2)\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{b+c}{b+r+c} \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+c} \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

2. Récurrence sur $\mathbb{N}^*$. Notons H_n la propriété $\mathbb{P}(A_n) = \frac{b}{b+r}$.

Initialisation : Pour $n = 1$ et $n = 2$, H_n est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n et montrons H_{n+1} . On a $\mathbb{P}_{A_1}(A_{n+1}) = \frac{b+c}{b+c+r}$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_{n+1}) = \frac{b}{b+c+r}$. Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_1}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_{n+1})\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{b+c}{b+c+r} \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+c+r} \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé de l'exercice 17. 1. On pose $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2. Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\varphi(n)}{n}$.

3. $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $A_i = \left\{ qp_i, 1 \leq q \leq \frac{n}{p_i} \right\}$, donc $\text{Card}(A_i) = \frac{n}{p_i}$. Par suite, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{\text{Card}(A_i)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{p_i}$.

4. Soit $p \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r$. On a

$$\begin{aligned} k \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p} &\iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, p_{i_j} \text{ divise } k \\ &\iff \prod_{j=1}^p p_{i_j} \text{ divise } k && \text{car les } p_{i_j} \text{ sont distincts} \\ &&& \text{et premiers entre eux} \\ &\iff k \in A_p \text{ où } p = \prod_{j=1}^p p_{i_j}. \end{aligned}$$

Par suite, $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}) = \mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_p}} = \prod_{j=1}^p \mathbb{P}(A_{i_j})$. D'où les événements $A_1, \dots, A_r$ sont mutuellement indépendants.

5. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} k \in A &\iff k \wedge n = 1 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, k \wedge p_i = 1 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, p_i \text{ ne divise pas } k \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, k \in \overline{A_{p_i}} \\ &\iff k \in \bigcap_{i=1}^r \overline{A_{p_i}}. \end{aligned}$$

Par suite, $A = \bigcap_{i=1}^r \overline{A_{p_i}}$. Or

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\varphi(n)}{n} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r \overline{A_{p_i}}\right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^r (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

D'où $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Corrigé de l'exercice 18. 1. la famille $(\lambda n^{-s})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ si elle est sommable et de somme égale à 1. Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^s} = 1$ si, et seulement si, $\lambda = 1/\zeta(s)$. Ainsi $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $p_1 < \dots < p_r$ des nombres premiers. On a $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r} = A_{p_1 \dots p_r}$ et

$$\mathbb{P}(A_p) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{kp\}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(kp)^s} = \frac{\lambda}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{p^s}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r}) = \mathbb{P}(A_{p_1 \dots p_r}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_r)^s} = \mathbb{P}(A_{p_1}) \dots \mathbb{P}(A_{p_r})$. Donc les événements $(A_{p_k})_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants.

3. Seul le nombre 1 qui n'est divisible par aucun nombre premier, donc $\{1\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{A_{p_k}}$. Par continuité monotone et indépendance

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{A_{p_k}}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^N \overline{A_{p_k}}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \mathbb{P}(\overline{A_{p_k}}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Or $\mathbb{P}(\{1\}) = \lambda$ et par passage à l'inverse, on obtient la relation $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$.

4. Supposons la famille $(p_k)_{k \geq 1}$ sommable, donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ converge. On a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-1}}\right) = -\sum_{k=1}^N \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Or $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$ donc par comparaison, la série $\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge. Posons $M = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-1}}$. De plus, pour tout $s > 1$, $\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \leq \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-1}}$ et donc, lorsque N tend vers l'infini, $\zeta(s) \leq M$ et ceci est absurde car $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} +\infty$.

Corrigé de l'exercice 19. 1. $\Omega = F^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

2. Pour construire un $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A_k$, nous commençons par choisir les places des éléments de F_1 : k places parmi n , donc $\binom{n}{k}$ choix possibles. Ensuite, nous remplissons ces places avec des éléments de F_1 : il y a N_1^k façons de le faire. Enfin, nous remplissons les $n - k$ places restantes avec des éléments de F_2 : il y a N_2^{n-k} façons de le faire. Finalement,

$$\text{Card } A_k = \binom{n}{k} N_1^k N_2^{n-k}.$$

3. On a :

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{n}{k} N_1^k N_2^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où l'on a posé $p = N_1/N$ (p est la probabilité de choisir un élément de F_1).

Corrigé de l'exercice 20. 1. $\Omega = F^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

2. Pour construire un $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A_{k_1, \dots, k_m}$, nous commençons par choisir les places des éléments de $F_1, \dots, F_m$ de sorte que $k_1 + \dots + k_m = n$.

- Pour F_1 : k_1 places parmi n , donc $\binom{n}{k_1}$ choix possibles. Ensuite, nous remplissons ces places avec des éléments de F_1 : il y a $N_1^{k_1}$ façons de le faire.
- Pour F_2 : k_2 places parmi $n - k_1$ restantes, donc $\binom{n-k_1}{k_2}$ choix possibles. Ensuite, nous remplissons ces places avec des éléments de F_2 : il y a $N_2^{k_2}$ façons de le faire.
- $\vdots$
- Pour F_m : k_m places parmi $n - k_1 - \dots - k_{m-1}$ restantes, donc $\binom{n-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m}$ choix possibles. Ensuite, nous remplissons ces places avec des éléments de F_m : il y a $N_m^{k_m}$ façons de le faire.

Finalement,

$$\text{Card } A_{k_1, \dots, k_m} = \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \dots \times \binom{n-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m} N_1^{k_1} \times N_2^{k_2} \times \dots \times N_m^{k_m}$$

et par suite

$$\text{Card } A_{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \times \dots \times k_m!} N_1^{k_1} \times N_2^{k_2} \times \dots \times N_m^{k_m}.$$

3. On a :

$$\mathbb{P}(A_{k_1, \dots, k_m}) = \frac{\text{Card } A_{k_1, \dots, k_m}}{\text{Card } \Omega} = \frac{n!}{k_1! \times \dots \times k_m!} \frac{N_1^{k_1} \times N_2^{k_2} \times \dots \times N_m^{k_m}}{N^n} = \frac{n!}{k_1! \times \dots \times k_m!} \frac{N_1^{k_1} \times N_2^{k_2} \times \dots \times N_m^{k_m}}{N^{k_1 + \dots + k_m}}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}(A_{k_1, \dots, k_m}) = \frac{n!}{k_1! \times \dots \times k_m!} p_1^{k_1} \times \dots \times p_m^{k_m}$$

où l'on a posé $p_i = N_i/N$ (p_i est la probabilité de choisir un élément de F_i).

Corrigé de l'exercice 21. 1. L'expérience aléatoire considérée a pour résultat un élément quelconque de $\mathcal{P}_n(F)$ où $\mathcal{P}_n(F)$ est l'ensemble des parties de F de cardinal n . Donc $\Omega = \mathcal{P}_n(F)$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

2. On écrit

$$A_k = B_k \uplus B_{n-k} \text{ avec } B_k \in \mathcal{P}_k(F_1) \text{ et } B_{n-k} \in \mathcal{P}_{n-k}(F_2).$$

Pour B_k , il y a $\binom{N_1}{k}$ façons de le faire et pour B_{n-k} , il y a $\binom{N_2}{n-k}$ façons de le faire. Ainsi $\text{Card } A_k = \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}$.

3. On a :

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N_1+N_2}{n}} \text{ avec } 0 \leq k \leq N_1 \text{ et } 0 \leq n-k \leq N_2.$$

Corrigé de l'exercice 22. 1. L'expérience aléatoire considérée a pour résultat un élément quelconque de $\mathcal{P}_n(F)$ où $\mathcal{P}_n(F)$ est l'ensemble des parties de F de cardinal n . Donc $\Omega = \mathcal{P}_n(F)$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

2. On écrit

$$A_{k_1, \dots, k_m} = B_{k_1} \uplus \dots \uplus B_{k_m} \text{ avec } B_{k_i} \in \mathcal{P}_{k_i}(F_i).$$

Pour B_{k_i} , il y a $\binom{N_i}{k_i}$ façons de le faire pour tout $1 \leq i \leq m$. Ainsi $\text{Card } A_{k_1, \dots, k_m} = \binom{N_1}{k_1} \times \dots \times \binom{N_m}{k_m}$.

3. On a :

$$\mathbb{P}(A_{k_1, \dots, k_m}) = \frac{\text{Card } A_{k_1, \dots, k_m}}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \times \dots \times \binom{N_m}{k_m}}{\binom{N}{n}} \text{ avec } k_1 + \dots + k_m = n.$$

Corrigé de l'exercice 23. 1. $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. On a

$$\begin{cases} A_{i_k} = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{i_k}, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n, \omega_{i_k} = 1 \right\} \\ A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n, \omega_{i_1} = \dots = \omega_{i_k} = 1 \right\} \end{cases}.$$

On constate alors que $\text{Card}(A_{i_1}) = \dots = \text{Card}(A_{i_k}) = 2^{n-1}$ et $\text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = 2^{n-k}$, et donc

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \mathbb{P}(A_{i_j}) = \frac{\text{Card}(A_{i_j})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{\text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \frac{1}{2^k} \end{cases}.$$

D'où, les événements A_i , $1 \leq i \leq n$, sont mutuellement indépendants.

Corrigé de l'exercice 24. 1. $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

2. Posons, pour $0 \leq k \leq n$, $\Omega_k = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n, \omega_1 + \dots + \omega_n = k \right\}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} \prod_{i=1}^n f(\omega_i) &= \sum_{\omega \in \{0, 1\}^n} \prod_{i=1}^n f(\omega_i) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_k} \prod_{i=1}^n f(\omega_i) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1 \end{aligned}$$

car parmi les ω_i , k valent 1 donc k des $f(\omega_i)$ valent p , $n-k$ valent 0 donc les $n-k$ autres $f(\omega_i)$ valent $1-p$. D'où $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels positifs sommable et de somme 1.

3. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $A_j = \left\{ \omega \in \Omega, \omega_j = 1 \right\}$, alors

$$\mathbb{P}(A_j) = \sum_{\omega \in A_j} p_\omega = \sum_{\omega \in A_j} \prod_{i=1}^n f(\omega_i) = \sum_{\omega \in A_j} \underbrace{f(\omega_j)}_{=p} \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n f(\omega_i) = p \underbrace{\sum_{\omega \in A_j} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n f(\omega_i)}_{=1} = p.$$

Maintenant soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) &= \sum_{\omega \in A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}} \prod_{i=1}^n f(\omega_i) \\ &= \sum_{\omega \in A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}} \underbrace{f(\omega_{j_1}) \dots f(\omega_{j_k})}_{=p^k} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, i \neq j_k}}^n f(\omega_i) \\ &= p^k \underbrace{\sum_{\omega \in A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j_1, \dots, i \neq j_k}}^n f(\omega_i)}_{=1} = p^k. \end{aligned}$$

et par suite, $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = \mathbb{P}(A_{j_1}) \dots \mathbb{P}(A_{j_k})$. D'où, les événements A_i , $1 \leq i \leq n$, sont mutuellement indépendants.

3 Variables aléatoires réelles : généralités

Corrigé de l'exercice 25. $1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n(n+1)} = a \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = a$ donc $a = 1$.

Corrigé de l'exercice 26. 1. $\omega \in A \iff X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$ donc

$$A = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \varepsilon \right\}.$$

Il est clair que

$$A \subset \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \varepsilon \right\}.$$

Réciproquement Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $0 < r < \varepsilon$. Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|X_n - X| \leq r < \varepsilon$ donc $\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \varepsilon \right\} \subset A$ et par suite $A = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \varepsilon \right\}$.

2. $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable et $\mathcal{T}$ est stable par réunion et intersection dénombrables donc $A \in \mathcal{T}$ puisque $\left\{ |X_n - X| \leq \varepsilon \right\} \in \mathcal{T}$ donc A est un événement.

Corrigé de l'exercice 27. 1. Soit $m' < m$ et $\omega \in B_{j,m'} \cap B_{j,m}$. On a :

$$|X_{m'}(\omega) - X_{2^j}(\omega)| > \frac{1}{j} \text{ et } \forall n \in \llbracket 2^j, m-1 \rrbracket, |X_n - X_{2^j}| \leq \frac{1}{j}.$$

En particulier, pour $n = m'$, on a $|X_{m'}(\omega) - X_{2^j}(\omega)| \leq \frac{1}{j}$ et $|X_{m'}(\omega) - X_{2^j}(\omega)| > \frac{1}{j}$ ce qui est absurde. Par suite, $B_{j,m'} \cap B_{j,m} = \emptyset$ pour tout $m' \neq m$.

2. Soit $m \in \llbracket 2^j + 1, 2^{j+1} \rrbracket$. On a

$$\max_{2^j+1 \leq n \leq 2^{j+1}} |X_n - X_{2^j}| \geq |X_m - X_{2^j}|$$

donc $\bigcup_{2^j+1 \leq m \leq 2^{j+1}} B_{j,m} \subset A_j$. Réciproquement, soit $\omega \in A_j$, il existe $n \in \llbracket 2^j + 1, 2^{j+1} \rrbracket$ tel que $|X_n(\omega) - X_{2^j}(\omega)| > \frac{1}{j}$. On pose

$$m = \min \left\{ k \in \llbracket 2^j + 1, 2^{j+1} \rrbracket, |X_k(\omega) - X_{2^j}(\omega)| > \frac{1}{j} \right\}$$

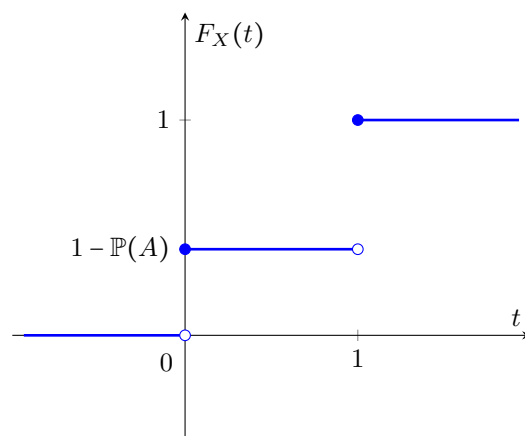
de sorte que $|X_m(\omega) - X_{2^j}(\omega)| > \frac{1}{j}$ et $\forall n \in \llbracket 2^j, m-1 \rrbracket, |X_n(\omega) - X_{2^j}(\omega)| \leq \frac{1}{j}$.

Alors on a $\omega \in \bigcup_{2^j+1 \leq m \leq 2^{j+1}} B_{j,m}$ d'où $A_j = \bigcup_{2^j+1 \leq m \leq 2^{j+1}} B_{j,m}$.

Corrigé de l'exercice 28. Soit $t \in \mathbb{R}$. $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leq t \\ 0 & \text{si } \lambda > t \end{cases} = 1_{[\lambda, +\infty[}(t).$

Corrigé de l'exercice 29. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $X^{-1}([-\infty, x]) = (1_A \leq x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ \overline{A} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \Omega & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ donc $X^{-1}([-\infty, x]) \in \mathcal{T}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(1_A \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathbb{P}(A) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = 1_{[1, +\infty[}(t) + (1 - \mathbb{P}(A))1_{[0, 1[}(t).$



Corrigé de l'exercice 30. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 F_Y(t) &= \mathbb{P}(Y \leq t) \\
 &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > t) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > t, \dots, X_n > t) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) \\
 &= 1 - (\mathbb{P}(X_1 > t))^n = 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n.
 \end{aligned}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) \\
 &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\
 &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) \\
 &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) \\
 &= (\mathbb{P}(X_1 \leq t))^n = (F_{X_1}(t))^n.
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 31.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}((X \geq k) \cap (X \leq k)) \\
 &= \mathbb{P}((X \geq k) \cap \overline{(X > k)}) \\
 &= \mathbb{P}((X \geq k) \setminus (X > k)) \\
 &= \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}((X \geq k) \cap (X > k)) \\
 &= \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}((X \leq k) \cap (X \geq k)) \\
 &= \mathbb{P}((X \leq k) \cap \overline{(X < k)}) \\
 &= \mathbb{P}((X \leq k) \setminus (X < k)) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}((X \leq k) \cap (X < k)) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X < k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1).
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 32. $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Soit $k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket$. On a $(X = k) = \{(i, j) \in \Omega, i + j = k\}$ et $\text{Card}(X = k) = \begin{cases} k - 1 & \text{si } 2 \leq k \leq 7 \\ 12 - k + 1 & \text{si } 8 \leq k \leq 12 \end{cases}$

$$\text{donc } \forall k \in \llbracket 2, 12 \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{Card}(X = k)}{\text{Card}(\Omega)} = \begin{cases} \frac{k - 1}{36} & \text{si } 2 \leq k \leq 7 \\ \frac{12 - k + 1}{36} & \text{si } 8 \leq k \leq 12 \end{cases}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
somme des p_k	$\sum_{k=2}^{12} p_k = 1$										

Corrigé de l'exercice 33. Soit $k \in \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$. On a $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(2n - X = k) = \mathbb{P}(X = 2n - k)$.

- Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors $2n - k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$, donc $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{(2n - (2n - k))}{n^2} = \frac{k}{n^2}$.
- Si $k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$ alors $2n - k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc $\mathbb{P}(Y = k) = 2n - k$.
- Si $k = n$ alors $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n}$.

D'où X et Y ont la même loi.

Corrigé de l'exercice 34. 1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, On a

$$\begin{cases} (X_k = 1) = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \underbrace{1}_{k\text{-ième place}}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n), (\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^{n-1} \right\} \\ (X_k = 0) = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \underbrace{0}_{k\text{-ième place}}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n), (\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_{k+1}, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^{n-1} \right\} \end{cases}$$

donc $\text{Card}(X_k = 1) = \text{Card}(X_k = 0) = 2^{n-1}$.

2. $(T = 1) = (X_1 = 1)$, donc $\mathbb{P}(T = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$. Si $2 \leq k \leq n$, on a : $(T = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = 0) \right) \cap (X_k = 1)$. Or les X_i , $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X_k = 1) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{2^{n-1}}{2^n} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}.$$

$(T = n+1) = \{(0, \dots, 0)\}$, donc $\mathbb{P}(T = n+1) = \frac{1}{2^n}$.

k	1	2	...	...	i	...	...	n	$n+1$
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	$1/2$	$1/2^2$	...	...	$1/2^i$	...	...	$1/2^n$	$1/2^n$
somme des p_k	$\sum_{k=1}^{n+1} p_k = 1$								

Corrigé de l'exercice 35. 1. θ_n est une probabilité donc $\theta_n \in [0, 1]$. Si $\theta_n = 1$ alors $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n)$ et donc $\mathbb{P}(T > n) = 0$ ce qui contredit les hypothèses. Par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n \in [0, 1[$.

2. On a $\mathbb{P}(T = n) = \theta_n \mathbb{P}(T \geq n)$ et $\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T > n)$ donc

$$\mathbb{P}(T \geq n+1) = (1 - \theta_n) \mathbb{P}(T \geq n).$$

Or $\mathbb{P}(T \geq 0) = 1$ donc $\mathbb{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$. (*)

La suite $((T \geq n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, par continuité monotone,

$$\mathbb{P}(T \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T \geq n)\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(0) = -\infty$. Ainsi la série $\sum \ln(1 - \theta_n)$ diverge.

- Si la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ diverge (grossièrement).
- Si la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend pas vers 0 alors $\ln(1 - \theta_n) \underset{+\infty}{\sim} -\theta_n$ et, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \theta_n$ diverge.

3. Analyse : Supposons qu'il existe une v.a.r T telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n)$. D'après (*) :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geq n) - \mathbb{P}(T \geq n+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) - \prod_{k=0}^n (1 - \theta_k) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

ce qui détermine entièrement la loi de T .

Synthèse : Posons, $\alpha_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$ et $p_n = \theta_n \alpha_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^N p_n = \sum_{n=0}^N \left((1 - (1 - \theta_n)) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) \right) = \sum_{n=0}^N (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 1 - \alpha_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

La famille $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels positifs sommable et de somme égale à 1 donc il existe une v.a.r T telle que

$p_n = \mathbb{P}(T = n) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$. On a alors

$$\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} (T = k)\right) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = p_n > 0.$$

et $\mathbb{P}(T = n \mid T \geq n) = \theta_n$.